

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

MITWIRKUNG VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. KLOTTER
MARGUERRE · H. NEUBER · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT
TOLLMIEHN · H. UNGER UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

ND 40

SEITE 529—576

HEFT 12

DEZEMBER 1960

AUS DEM INHALT:

H A U P T A U F S Ä T Z E

F. Reutter: Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und Jacobische elliptische Funktionen II. / **R. J. Knops:** The Use of Poisson's Ratio in Studying Certain Non-Homogeneous Elastic Inclusions / **L. Némethi:** Über den beginnenden plastischen Zustand bei unter innerem Überdruck stehenden Rohren / **C. Weber:** Einseitig eingespannter Plattenstreifen mit Einzellast

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

EINGEGANGENE BÜCHER

NACHRICHTEN



AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN

INHALT:

Seite

Hauptaufsätze. F. Reutter: Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und Jacobische elliptische Funktionen II.	529
R. J. Knops: The Use of Poisson's Ratio in Studying Certain Non-Homogeneous Elastic Inclusions	541
L. Némethi: Über den beginnenden plastischen Zustand bei unter innerem Überdruck stehenden Rohren.	551
C. Weber: Einseitig eingespannter Plattenstreifen mit Einzelast	558
Kleine Mitteilungen. S. Matsunaga: On the Stress Distribution of the Rotating Circular Ring Type Shell	566
R. Ansorge und W. Törnig: Zur Stabilität des Nyströmschen Verfahrens	568
A. Hanuska: Die Anwendung der Methode der Störungsrechnung für die Untersuchung des Einflusses der Querdehnungszahl auf den Spannungszustand dünner Platten	570
Buchbesprechungen	571
Eingegangene Bücher	576
Nachrichten	576
Berichtigung	576

Wir bitten, alle Manuskriptsendungen direkt an den Herausgeber, Prof. Dr.-Ing. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31, zu richten. Zu den Arbeiten, die als Hauptaufsätze bestimmt sind, erbitten wir auf gesondertem Blatt eine kurze Zusammenfassung des Inhalts, nach Möglichkeit in deutscher, englischer und russischer Sprache; falls die Übersetzungen nicht geliefert werden können, ist wenigstens die Angabe spezieller Fachausdrücke in den verschiedenen Sprachen erwünscht. Die Arbeiten sollen in klarer Schrift, möglichst mit Schreibmaschine, zeitweilig und einseitig geschrieben sein und die nötigen Hinweise für den Setzer betreffend Schrifttypen (z. B. griechisch, Fraktur), Sperrungen o. d. enthalten. Zur Beschleunigung des Drucks und zur Vermeidung von Satzfehlern empfiehlt es sich, umfangreiche und unübersichtliche Formelausdrücke durch Einführung von Abkürzungen zu vermeiden. Bilder sollen als Tuschzeichnungen auf Transparentpapier (Beschriftung mit Bleistift) oder als saubere Bleistiftskizzen ausgeführt sein. Bildunterschriften sind am Schluß des Textes anzufügen. Sollte die Arbeit bereits an anderer Stelle verbreitet sein (als Dissertation, Forschungsbericht, Manuskriptdruck o. ä.), so ist dies auf der ersten Textseite in einer Fußnote anzugeben. Für die Zusammenstellung der zitierten Literatur, am Schluß der Arbeit, bitten wir, sich einer einheitlichen Notation entsprechend folgendem Muster zu bedienen, z. B. W. Schmeidler, Über die Wärmespannungen in einem Körper, ZAMM 28 (1948), S. 54—59 oder G. Bürgermeister und H. Steup, Stabilitätstheorie I, 1. Aufl., Berlin 1957, Akademie-Verlag, S. 142—147. Die Autoren erhalten von den Hauptaufätzen 75, von den Kleinen Mitteilungen 25 Sonderdrucke ohne Berechnung, darüber hinaus bis zu 250 Sonderdrucke gegen Berechnung.

Der Verlag behält sich für alle Beiträge das Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung vor.

Band 1—7 erschien innerhalb der Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik

Ab Band 8 lautet der Reihentitel

SCHRIFTENREIHE DER INSTITUTE FÜR MATHEMATIK

BEI DER DEUTSCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

und wird herausgegeben von

Prof. Dr. Heinrich Grell, Prof. Dr. Josef Naas, Prof. Dr. Achilles Papapetrou, Prof. Dr. Hans Reichardt, Prof. Dr. Willi Rinow, Prof. Dr. Erhard Schmidt und Prof. Dr. Kurt Schröder

Der Begriff des Raumes in der Geometrie

Bericht von der Riemann-Tagung des Forschungsinstituts für Mathematik. Mit Beiträgen von 28 Autoren, herausgegeben von Prof. Dr. J. NAAS und Prof. Dr. KURT SCHRÖDER
1957, VIII, 317 Seiten — 22 Abbildungen — 9 Tafeln — gr. 8° — vergriffen

Lösung des allgemeinen Randwertproblems für eindimensionale gedämpfte Wellen bei harmonischem Zeitgesetz
Von Dr. KARL BORKMANN und SIEGFRIED OBERLÄNDER
1955, 99 Seiten — gr. 8° — DM 12,—

Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen

Von A. W. POGORELOW
(Übersetzung aus dem Russischen)
Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. J. NAAS
1956, 79 Seiten — gr. 8° — DM 5,50

Bemerkungen über die Stabilitätsuntersuchungen der Wirbelstraßen

Von Prof. Dr. B. DOLAPTSCHIEW
1957, 28 Seiten — gr. 8° — DM 3,80

Die Verbiegung konvexer Flächen

Von A. W. POGORELOW
(Übersetzung aus dem Russischen)
Wissenschaftliche Redaktion: Prof. Dr. E. REMBS
1957, 135 Seiten — 26 Abbildungen — gr. 8° — DM 18,50

Einführung in die Theorie stationärer Zufallsfunktionen

Von A. M. JAGLOM
(Übersetzung aus dem Russischen)
Deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von Dr. HERBERT GOERING
1959, VIII, 177 Seiten — 8 Abbildungen — gr. 8° — DM 24,—

Tabellen von Exponentialfunktionen und -integralen zur Anwendung auf Gebieten der Thermodynamik, Halbleitertheorie und Gaskinetik

Von SIEGFRIED OBERLÄNDER
1959, VIII, 8 Seiten Text — 142 Tabellenseiten — 1 Abbildung — gr. 8° — Ganzleinen DM 35,—

In Vorbereitung befinden sich weiterhin:

Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik

Von Dr. HERBERT BENZ

Qualitative Theorie der nichtlinearen Schwingungen

Von Dr. ROLF REISSIG

Nomogramme zur Ermittlung der Wurfbahnen von Körpern im widerstehenden Medium

Von ELEONORE SCHWARZ

Fordern Sie bitte unseren Fachkatalog MATHEMATIK an, der Ihnen kostenlos zugestellt wird.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbitten

AKADEMIE - VERLAG · BERLIN

Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und Jacobische elliptische Funktionen II.

Von F. REUTTER

Im Anschluß an Teil I werden hier insbesondere Untersuchungen über die zweckmäßige Formgebung von Nomogrammen elliptischer Funktionen angestellt.

The study of nomograms of elliptic functions and their suitable form, started in Part I, is continued.

Примыкая к первой части работы, здесь рассматривается в частности вопрос построения наиболее целесообразного вида номограмм для эллиптических функций.

5. Forderungen zur Bestimmung der Formgebungskonstanten

Die Bogenlänge Δs , die zu einem festen Argumentschritt Δx bzw. Δy gehört, kennzeichnet die Ablesegenauigkeit auf der x - bzw. y -Skala; sie ist proportional zu $\left| \frac{ds}{dx} \right|$ bzw. $\left| \frac{ds}{dy} \right|$. Diese Größen erreichen an Stellen x_{m_1} bzw. y_{m_2} , deren Lage von den Formgebungskonstanten c_1, c_2, d_1, d_2, c und von k^2 abhängt, einen größten Wert; dabei wird

$$\left(\frac{d^2s}{dx^2} \right)_{x=x_{m_1}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{d^2s}{dy^2} \right)_{y=y_{m_2}} = 0 \quad \dots \dots \dots (5,1).$$

Wählt man bei festem k^2 ein Wertepaar x_{m_1}, y_{m_2} , so erhält man in (5,1) zwei Gleichungen zur Bestimmung der Formgebungskonstanten. Gibt man hierzu noch eine dritte Bedingung vor, so ist das Nomogramm bis auf eine Ähnlichkeitstransformation (und bei parallelen Skalen für u und v noch eine Parallelverschiebung) bestimmt. Um dies zu erkennen, setzt man zunächst $c_1 = 1$ und bestimmt im Falle paralleler Skalen für u und v die Größen $c_2 = c_2^*, d_2 - d_1 = d_2^* - d_1^*$ und $c = c^*$, im Falle senkrechter Skalen $c_2 = c_2^*, d_1 = d_1^*$ und $d_2 = d_2^*$ aus (5,1) und einer weiteren Bedingung. Man erhält ein Nomogramm, dessen ξ - und η -Koordinaten beide den Faktor m bzw. $1/m$ erhalten, wenn man den Formgebungskonstanten die Werte $c_1 = m c_1^*, c_2 = m c_2^*, d_2 - d_1 = m (d_2^* - d_1^*), c = m c^*$ bzw. $c_1 = m c_1^*, c_2 = m c_2^*, d_1 = m d_1^*, d_2 = m d_2^*$ gibt.

Variiert man die Werte x_{m_1} und y_{m_2} über den ganzen darzustellenden x - und y -Bereich, so erhält man zu jedem Wertetripel x_{m_1}, y_{m_2} und k^2 ein Nomogramm, das für dieses k^2 eine besonders genaue Ablesung für Argumente x bzw. y in einer gewissen Umgebung von x_{m_1} bzw. y_{m_2} gestattet. Die verwickelte Rechnung zur Bestimmung der Formgebungskonstanten läßt sich durch eine einfachere ersetzen, wie für die Funktion $w = am(z, k^2)$, k^2 reell, dargelegt sei. Wählt man die Formgebungskonstanten so, daß für gegebenes k^2 die gesamte Bogenlänge zwischen den Argumenten $x = 0$ bzw. $y = 0$ und $x = K/2$ bzw. $y = K'/2$ gleich der zwischen $x = K/2$ bzw. $y = K'/2$ und $x = K$ bzw. $y = K'$ ist, so zeigt sich, daß $x_{m_1} = K/2, y_{m_2} = K'/2$. Man hat noch eine damit verträgliche Forderung frei. So kann man z. B. verlangen, daß auch die gesamte Länge der x -Skala gleich der gesamten Länge der y -Skala wird. (Dabei wird vorausgesetzt, daß die Skalenträger für x und y Ellipsen oder solche Hyperbeln sind, bei denen nur im Endlichen liegende Kurventeile beschriftete Skalenpunkte tragen.) — Fordert man, daß einer der beiden Teilbogen der x - bzw. der y -Skala gleich dem a -fachen bzw. b -fachen (mit positivem $a \geq 1, b \geq 1$) des anderen wird, so lassen sich die Werte von x_{m_1} bzw. y_{m_2} an geeignete andere von $K/2$ bzw. $K'/2$ verschiedene Stellen verlegen.

Für den vorliegenden Zweck sollen die auftretenden Bogenlängen für ein festes k^2 durch die Summe von je zwei Sehnenstücken, deren Schnittpunkte mit den Skalenträgern bei den Argumentwerten $0, K/4, K/2, 3/4 K, K$ bzw. $0, K'/4, K'/2, 3/4 K', K'$ liegen, approximiert werden.

Beispiel ①
Ablesung:
 $am(1,1+i0,65,0,2) = 1088+i0594^1)$
Berechnung:
 $am(1,1+i0,65,0,2) = 10753+i05933$

Beispiel ②
Ablesung:
 $am(1,04+i0,6,0,5) = 0432+i0592$
Berechnung:
 $am(1,04+i0,6,0,5) = 04310+i05902$

Beispiel ③
Ablesung:
 $am(1,04+i0,4,1,0) = 0421+i0378$
Berechnung:
 $am(1,04+i0,4,1,0) = 04195+i03771$

1) Die angegebenen Dezimalstellen
beziehen sich bei allen Bildern
auf Ablesungen an Originalzeich-
nungen in größerem Format

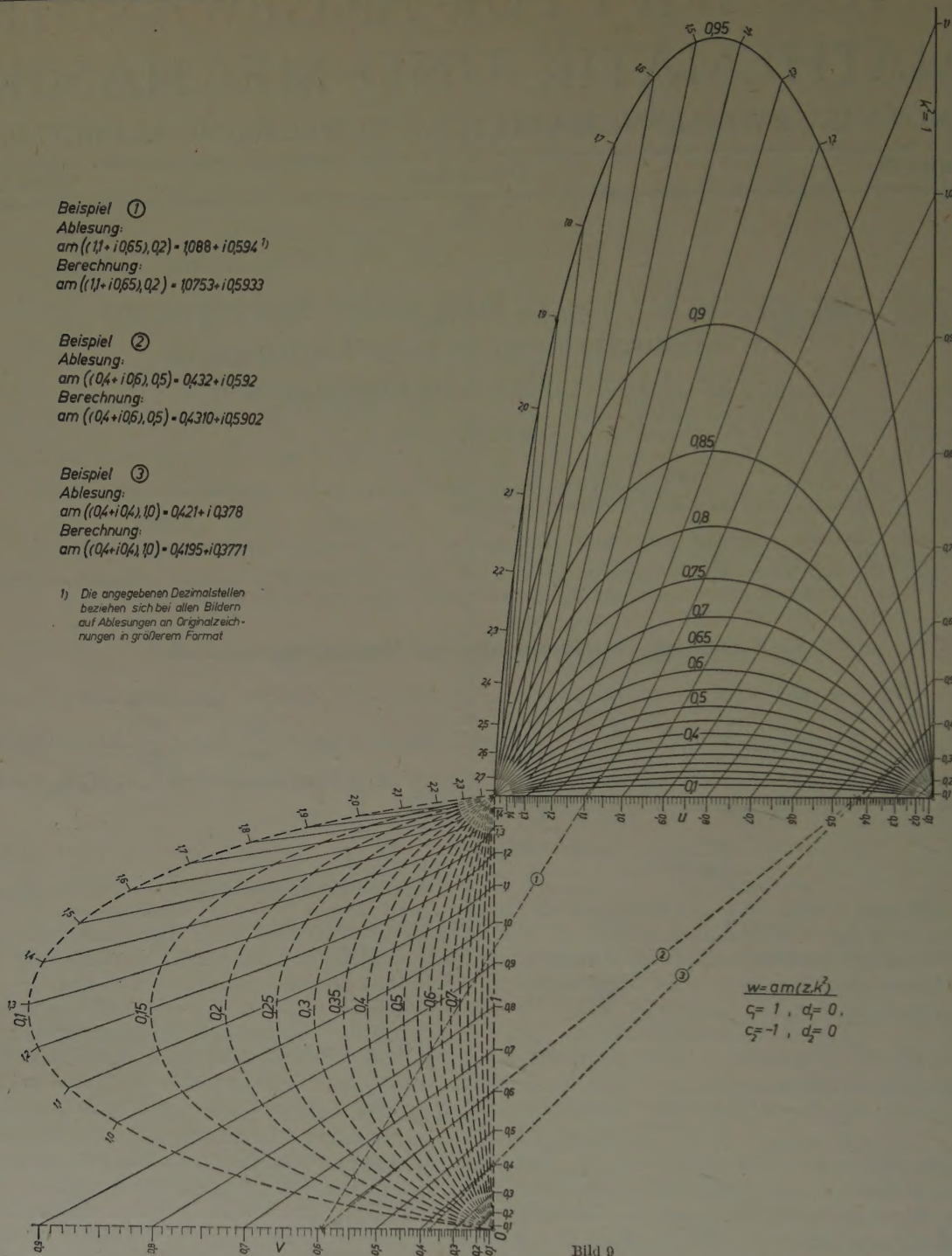


Bild 9

$$\begin{aligned} w &= am(z, k^2) \\ c_1 &= 1, d_1 = 0, \\ c_2 &= -1, d_2 = 0 \end{aligned}$$

Bezeichnet man diese noch von k^2 abhängigen Sehnenlängen mit S_1, S_2, S_3, S_4 bzw. S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 , so ergeben sich die Gleichungen

$$S_1 + S_2 = a(S_3 + S_4) \dots (5,2a), \quad S'_1 + S'_2 = b(S'_3 + S'_4) \dots (5,2b)$$

und eine damit verträgliche dritte Gleichung, etwa

$$S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2 \dots (5,3).$$

(5,2a), (5,2b), (5,3) können als Sonderfälle des allgemeineren Ansatzes

$$\alpha_i(S_1 + S_2) + \beta_i(S_3 + S_4) + \gamma_i(S'_1 + S'_2) + \delta_i(S'_3 + S'_4) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots (5,4)$$

angesehen werden. Dabei ist bei gemeinsamer Darstellung aller x - und y -Skalen eines Büschels noch die Verallgemeinerung möglich, S_i und S'_i von verschiedenen k^2 abhängig zu wählen (s. hierzu 6b α).

6. Die Formgebungskonstanten bei Nomogrammen mit vier reellen Grundpunkten

Die Ermittlung der drei Formgebungskonstanten nach 5. erfolgte mit Hilfe eines elektronischen Rechengertes. Als Ausgangspunkte der Rechnung dienten aus Nomogrammskizzen ermittelte Werte der c_i, d_i , die den Forderungen in 5. schon einigermaßen nahe kamen. Auf diese Weise wurden Bereiche für die Formgebungsgrößen ermittelt, innerhalb denen die Maschine durch Einsetzen und Ausprobieren die der endgültigen Berechnung der Nomogramme zu Grunde liegenden Werte ermittelte. Dabei zeigte sich u. a., daß es Wertetripel gibt, für die die Forderungen (5,2) mit $a = b = 1$ für alle k^2 eines Bereiches erfüllt sind (Beispiel: Bild 9 für $0 < k^2 < 1$).

Im Hinblick auf die praktische Verwendbarkeit der Nomogramme elliptischer Funktionen interessieren in erster Linie Nomogramme für die Funktion $w = am(z, k^2)$ für $0 \leq k^2 \leq 1$, da für $k^2 < 0$ und $k^2 > 1$ Funktionswerte durch Umrechnung mittels der bekannten Modultransformationen an den Nomogrammen für den Bereich $0 < k^2 < 1$ abgelesen werden können. Trotzdem wurden auch Nomogramme für $k^2 < 0$ und $k^2 > 1$ zum Zwecke einer Übersicht angelegt (Bilder 6 und 7 sowie die Bilder 14, 15, 16). Der Fall $k^2 < 0$ wird außerdem für 9. benötigt (Bild 17).

a) $w = am(z, k^2)$, parallele Skalen für u und v

Die Invariante $J_2(k^2)$ (Gl. (2,16)) hat stets zwei voneinander verschiedene reelle Nullstellen, von denen eine bei $k^2 = 0$ liegt. Für $|k^2| \gg 1$ ist stets $J_2 < 0$, außerdem ist $J_2(1) \leq 0$. Daher können sich Ellipsen nur für einen Teilbereich des Bereiches $-\infty < k^2 < +1$ ergeben. Die vier Grundpunkte sind stets eigentliche Punkte.

α) $0 < k^2 < 1$: Damit alle Skalen für x und y auf Ellipsen¹¹⁾ liegen, müssen die Formgebungskonstanten so gewählt werden, daß die Nullstellen von $J_2(k^2)$ bei $k^2 = 0$ und $k^2 = 1$ liegen. Es ergibt sich $c_1 = -c_2$, unabhängig von d_1 und d_2 . Zugleich ist (5,2) ($a = b = 1$) für alle k^2 erfüllt, wenn noch $c = 2$ und $d_2 - d_1 = 0$ gesetzt wird. So gelangt man zu dem in Bild 9¹²⁾ dargestellten nach 3. symmetrischen Nomogramm. (Neben (5,2 a, b) ist für $k^2 = 0,5$ eine Gl. (5,4) mit $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \gamma_1 = \delta_1 = -1$ erfüllt.)

Wünscht man eine Bevorzugung eines Teilbogens ((5,2) mit $a \neq 1, b \neq 1$), so gelangt man zu Nomogrammen, die von der symmetrischen abweichen. Die Beeinflussungsmöglichkeit durch Abänderung der Formgebungskonstanten zeigen die Bilder 10 und 1. Bei beiden Bildern wird der k^2 -Bereich, für den die Skalenträger für x und y Ellipsen werden, eingeschränkt. Für Bild 10 gilt $0 < k^2 < 0,991$, für Bild 1 dagegen $0 < k^2 < 0,816$, wobei die Ellipse zu $k^2 = 0,8$ schon einen großen Platzbedarf hat. Dabei ist erreicht, daß für Werte von $k^2 > 0,2$ der Bogen der x -Skala zwischen $x = 0$ und $x = K/2$ wesentlich größer wird als der Bogen zwischen $x = K/2$ und $x = K$, so daß $x_{m_1} \ll K/2$, während $y_{m_2} \gg K/2$ ist.

β) $k^2 < 0$: Für $c_1 = +c_2 = 1$ bei beliebigem d_1 und d_2 ergibt sich ein Nomogramm mit Ellipsen für $k^2 < 0$. Die Forderungen (5,2) ($a = b = 1$) werden erfüllt, wenn man $c = 2$ und $d_2 - d_1 = 0$ setzt. Außerdem ist eine Gl. (5,4) für $k^2 = -1$ mit $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \gamma_1 = \delta_1 = -1$ erfüllt. Bild 17 zeigt ein solches Nomogramm für $d_1 = d_2 = 0$, dessen Graduierung für $w = \ln sn z$ angelegt ist (vgl. 9.).

b) $w = am(z, k^2)$, senkrechte Skalen für u und v

$J_2(k^2)$ (Gl. (2,17)) kann sowohl zwei verschiedene reelle als auch eine doppelt zählende reelle Nullstelle oder überhaupt keine reelle Nullstelle besitzen. Daher gibt es sowohl Nomogrammenformen, die für einen gewissen Bereich von k^2 Ellipsen als Skalenträger für x und y besitzen als auch solche, für die alle Skalenträger Hyperbeln sind. Ist noch

$$c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (6,1),$$

¹¹⁾ Es gibt kein zweckmäßiges Nomogramm mit parallelen Skalen für u und v und solchen Hyperbeln als Skalenträgern für x und y , bei denen nur im Endlichen liegende Kurventeile Skalenpunkte tragen. Denn die v -Skala eines solchen Nomogramms würde einen sehr großen Abstand von der u -Skala haben, wenn sich für einen genügend großen k^2 -Bereich Hyperbeln ergeben sollen.

¹²⁾ Über die Unterscheidung der Skalen durch die Ausziehtechnik vgl. die Angaben bei Bild 1. Man beachte außerdem Fußnote 8.

Beispiel ①
Ablesung:
 $am(1,08 + i1,01, 0,1) = 0,835 + i0,965$
Berechnung:
 $am(1,08 + i1,01, 0,1) = 0,8265 + i0,9736$

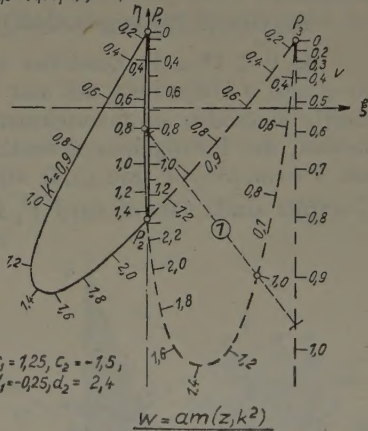


Bild 10

so stellt $J_2(k^2) = 0$ nur eine lineare Gleichung in k^2 dar. Ihre Nullstelle k_0^2 zerlegt den Bereich $-\infty < k^2 < +\infty$ so, daß sich für alle k^2 aus dem einen Teilbereich Ellipsen, für alle aus dem anderen Hyperbeln ergeben.

Aus den oben angeführten Bildern von Nomogrammen mit parallelen Skalen für u und v entnimmt man, daß

- für $0 < k^2 < 1$ die x -Skala von P_1 nach P_2 , die y -Skala von P_3 nach P_2 ,
 für $k^2 < 0$ die x -Skala von P_1 nach P_2 , die y -Skala von P_3 nach P_1 ,
 für $k^2 > 1$ die x -Skala von P_1 nach P_3 , die y -Skala von P_3 nach P_2

beziffert ist.

Wenn man fordert, daß sowohl die x - als auch die y -Skala im Endlichen bleiben, ergeben sich die in Bild 11a, b, c dargestellten Konfigurationen für senkrechte Skalen für u und v . Dabei

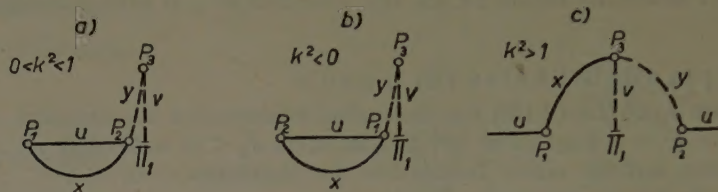


Bild 11

ist es nicht wesentlich, ob die Skalenträger für x und y Ellipsen oder Hyperbeln sind, da die Fernpunkte der Hyperbeln den nicht mit Skalenpunkten versehenen Kurventeilen angehören.

Die Konfigurationen 11a) und 11b) führen auf lauter Hyperbeln oder umfassen sowohl Hyperbeln als auch (für einen Teilbereich des Intervalls) Ellipsen, je nachdem ob P_4 durch Π_1 von P_3 getrennt wird oder nicht. Nur aus Ellipsen können sie wegen $I_2(0) < 0$ nicht bestehen. Die Konfiguration 11c) kann sowohl nur Ellipsen (z. B. für $d_1 = d_2 = 0$) als auch nur Hyperbeln umfassen.

Die Gln. (2,15) zeigen, daß jeder der vier Grundpunkte Fernpunkt werden kann (s. hierzu 10.).

α $0 < k^2 < 1$: Zunächst werden Nomogramme behandelt, deren sämtliche Skalenträger für x und y Hyperbeln mit nur im Endlichen liegenden beschrifteten Teilen sind. Die Grundpunkte sind also so anzunehmen, daß P_3 und P_4 durch Π_1 getrennt werden. Es soll versucht werden, die Formgebungskonstanten so zu bestimmen, daß (5,2a) mit $a = m$, $k^2 = 0$, (5,2b) mit $b = m$, $k^2 = 1$ und (5,4) mit $\alpha_1 = \beta_1 = +1$, $\gamma_1 = \delta_1 = -1$ und $k^2 = 0$ für S_i , $k^2 = 1$ für S'_i erfüllt sind. Damit wird $\overline{P_1 P_2} = \overline{P_2 P_3}$ und $\overline{P_1 P_4} = \overline{P_4 P_3}$ (Bild 12); man erhält ein symmetrisches Nomogramm (3.). Mit beliebigem $d_2 \neq 0$ ergibt sich:

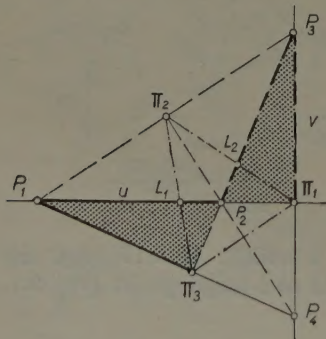


Bild 12

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{m-1}{1-3m} \sqrt{1-2md_2}, \\ c_2 &= \frac{m-1}{1-3m} d_2, \\ d_1 &= \frac{1+m}{1-3m} \sqrt{1-2md_2} \end{aligned} \right\} \quad (6,2).$$

Hierbei muß $m \neq 1$ gewählt werden, da $m = 1$ auf $c_1 = c_2 = 0$ führt. Weiterhin muß $1 - 2md_2 > 0$ sein.

Bild 13 zeigt ein symmetrisches Nomogramm mit $m = 2/7$ und $d_2 = 1$. Bei allen Nomogrammen für den Bereich $0 < k^2 < 1$ (sowohl bei senkrechten als auch bei parallelen Skalen für u und v) ist der Bereich, der bezifferte Kurvenpunkte trägt, der zweifach zusammenhängende Bereich, der von dem Streckenzug $P_1 \Pi_1 P_3 \Pi_3 P_1$ mit dem Doppelpunkt P_2 begrenzt ist (Bilder 12 und 13).

Zu einem anderen Typus von Nomogrammen mit Hyperbeln als Skalenträgern für x und y gelangt man durch die Forderung, daß P_4 Fernpunkt werden soll. Dies bedingt $c_2 = d_2$; die Begrenzungsstrecken $\overline{P_1 \Pi_3}$ und $\overline{P_3 \Pi_1}$ sind jetzt parallel.

Für $0 < k^2 < 1$ ist der Platzbedarf der Nomogramme mit senkrechten Skalen für u und v kleiner als der bei parallelen Skalen. Bei Nomogrammen mit parallelen Skalen wird mindestens ein Eckpunkt des Polar dreiecks zum Fernpunkt. Bei symmetrischen Nomogrammen gilt dies sogar für zwei Eckpunkte (Π_1 und Π_3). Daher erstrecken sich einer oder sogar beide Teilbereiche des Bereichs $P_1 \Pi_1 P_3 \Pi_3 P_1$ ins Unendliche. Das führt dazu, daß die Abstände der Skalenträger

bei gleichem Δk^2 mit wachsender Entfernung von der u - bzw. v -Skala immer größer werden. In dieser Hinsicht unterscheiden sich die Bilder 9 und 10 wesentlich von 13.

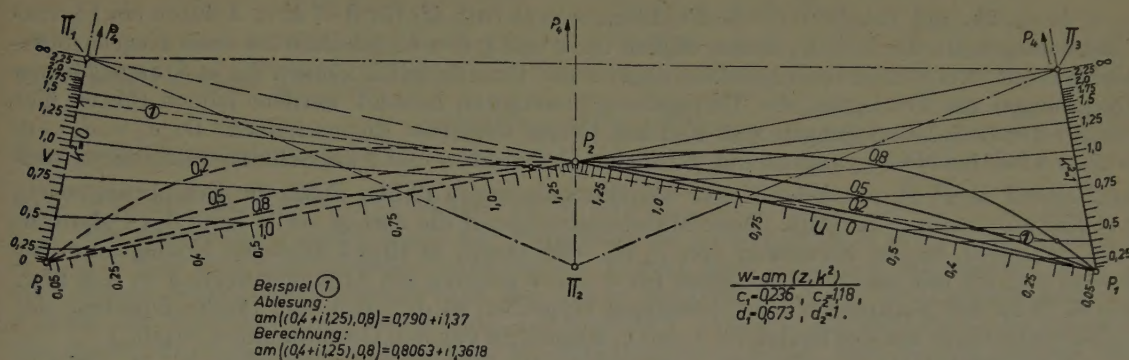


Bild 13

$\beta) k^2 < 0$: Es wurde eine Konfiguration gewählt, bei der P_4 Fernpunkt ist ($c_2 = d_2$). Weiter wurden zwei Gln. (5,4), davon eine mit $\alpha_1 = \beta_1 = +1, \gamma_1 = \delta_1 = -1$ und $k^2 = 0$ für $S_i, k^2 = 1$ für S'_i gefordert ($P_1 P_2 = P_1 P_3$). Bild 14 gibt ein solches Nomogramm.

$\gamma) k^2 > 1$: Für diesen k^2 -Bereich erhält man bei senkrechten Skalen für u und v stets Nomogramme mit ganz im Endlichen liegenden x - und y -Skalen.

Bild 15 zeigt ein Nomogramm mit lauter Ellipsen als Skalenträger für x und y . Das Nomogramm entspricht der Forderung (5,2) ($a = b = 1$). Die Seite $\Pi_2 \Pi_3$ des Polardreiecks ist die Ferngerade.

Bild 16 zeigt eine Nomogrammform mit Hyperbeln durch den Fernpunkt P_4 als Skalenträgern für x and y . In den Bildern 15 und 16 erstreckt sich die u -Skala über den Fernpunkt ihrer Trägergeraden. Die Bilder ergänzen einander hinsichtlich der Ablesemöglichkeiten auf der u -Skala.

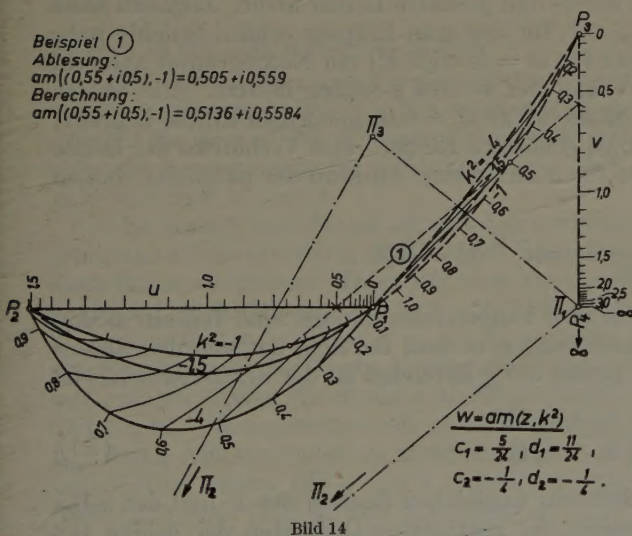


Bild 14

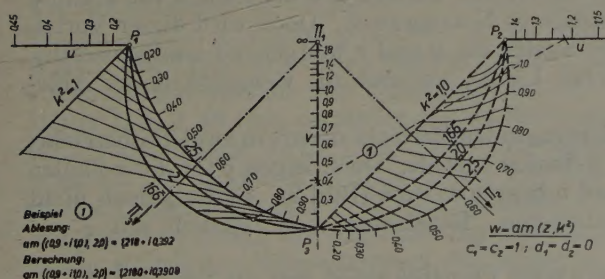


Bild 15

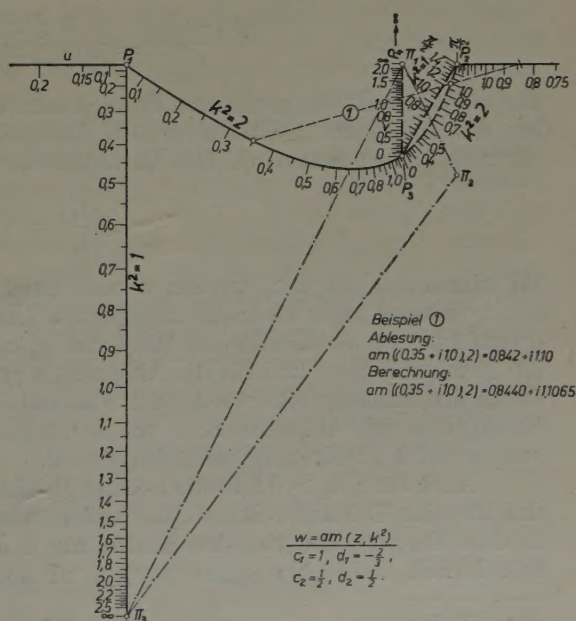


Bild 16

7. Die Formgebungskonstanten für Nomogramme mit zwei reellen Grundpunkten

Nach 2b. und Tabelle 1 ist die Funktion $w = \ln cn(z, k_c^2)$ für $0 < k_c^2 < 1$ durch ein Fluchtliniennomogramm darstellbar, dessen Skalen für x und y den Kegelschnitten eines Kegelschnittbüschels mit zwei reellen Grundpunkten angehören. Grundsätzlich können die in 5. angegebenen Forderungen zur Festlegung der Formgebungskonstanten benutzt werden, jedoch führen hier schon einfachere Überlegungen zum Ziel auf Grund folgender Eigenschaften: Ist $d_1 = d_2 = 0$, so tragen bei den Nomogrammen mit parallelen Skalen für u und v die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten zu $\bar{P}_1 \bar{P}_2$ mit jeder Kurve des Büschels wegen (2,21), (2,22) die Bezifferungswerte $x = K(k_c^2)/2$ bzw. $y = K'(k_c^2)/2$. Diese Mittelsenkrechte ist die einzige reelle Seite des Polardreiecks, ihr Pol II_1 ist der Fernpunkt von $P_1 P_2$. (Bei einem zu Bild 3 analogen Nomogramm für $w = \ln cn(z, k_c^2)$ mit senkrechten Skalen für u und v gehören die Argumentwerte $x = K/2$ bzw. $y = K'/2$ zu den Fernpunkten der jeweiligen Hyperbel, so daß sich eine rasche Zunahme der Teilstrichabstände auf den Skalen für x und y , ausgehend von den Grundpunkten, ergibt.)

Während bei den Nomogrammen mit vier reellen Grundpunkten die Werte x_{m_1}, y_{m_2} auf den einzelnen Kurven des Kegelschnittbüschels variieren, gehören bei den Nomogrammen mit zwei reellen Grundpunkten im Fall $d_1 = d_2$ zu allen Kurven des skalentragenden Kegelschnittbüschels die Werte $x_{m_1} = K(k^2)/2, y_{m_2} = K'(k^2)/2$. Dies gilt nicht mehr für $d_1 \neq d_2$, jedoch scheiden die zu $d_1 \neq d_2$ gehörigen Nomogramme wegen ungünstigen Platzbedarfs ohnehin aus. Daher sind nur die beiden folgenden Typen mit $d_1 = d_2$ zu untersuchen:

a) $w = \ln cn(z, k_c^2)$, parallele Skalen für u und v

Da für diese Nomogramme $J_2(k_c^2)$ von d_1 und d_2 unabhängig ist, wird die Form des Nomogramms im wesentlichen durch das Verhältnis c_1/c_2 bestimmt. Man kann dieses Verhältnis z. B. durch die Forderung festlegen, daß sich für einen gewissen, möglichst großen Bereich von k_c^2 Ellipsen als Skalenträger für x und y ergeben sollen. Eine nähere Untersuchung der Abhängigkeit der geometrischen Gestalt des Nomogramms vom Verhältnis c_1/c_2 ergibt: Für $c_1/c_2 = -0,25$ erhält man Ellipsen für $k_c^2 < 0,941$. Die Skalen für Real- und Imaginärteil sind von sehr unterschiedlicher Länge. So ist für $k_c^2 \geq 0,4$ die Ablesemöglichkeit auf der x -Skala wesentlich besser als die auf der y -Skala. Dagegen ist der Abstand der parallelen Skalen für u und v günstig.

Variiert man nun das Verhältnis $c_1/c_2 < 0$ im Intervall $-0,25 < c_1/c_2 < -0,0125$, so verringern sich die Unterschiede in den Längen der x - und y -Skalen immer mehr. Zugleich kann die obere Grenze $k_{c_0}^2$ des Bereiches $0 < k_c^2 < k_{c_0}^2 < 1$, für den man Ellipsen erhält, beliebig nahe an Eins herangebracht werden. Man kann jetzt für $w = \ln cn(z, k_c^2)$ ein Nomogramm anlegen, das im Bereich $0,05 \leq k_c^2 \leq 0,95$ Ellipsen als Träger der x - und y -Skalen besitzt. Alle Skalen liegen in einem Bereich, der einerseits von einer Skala der zu $k_c^2 = 0,05$ gehörigen Ellipse begrenzt wird, andererseits von einer Skala der zu $k_c^2 = 0,95$ gehörigen Ellipse. Das Verhältnis der Breite des Bereiches senkrecht zu den parallelen Skalen für u und v zum Abstand der parallelen Skalen ist

$$\frac{|f_3| + |f_4|}{c} = \frac{2 c_1^2 k_c^2}{c_1^2 k_c^2 - c_2^2 k_c'^2} \quad \text{mit} \quad k_c^2 = 0,95.$$

Die v -Skala teilt den genannten Bereich derart in zwei Teilbereiche, daß der eine Teil nur x -Skalen, der andere nur y -Skalen enthält. Die y -Skalen liegen in dem Bereich, der von den Skalen für u und v begrenzt wird. Das Verhältnis der Breite des y -Bereiches zu der des x -Bereiches ist

$$\left| \frac{f_4}{f_3} \right| = \left| \frac{c_1 k_c + c_2 k_c'}{c_1 k_c - c_2 k_c'} \right| \cdot \dots \cdot \dots \cdot (7,1).$$

Mit abnehmendem $|c_1/c_2|$ werden also die zunächst sehr ungleichen Breiten des x - und des y -Bereiches immer mehr einander angeglichen (ebenfalls die maximalen Ordinaten der beiden Begrenzungskurven). Ein kleiner Wert von $|c_1/c_2|$ liefert daher hinsichtlich der Skalen für x und y ein gleichmäßigeres und für die Ablesungen günstigeres Nomogramm. Doch wird dieser Vorteil durch den immer größer werdenden Abstand der Skalen für u und v weitgehend kompensiert¹³⁾. Es ergeben sich Ablesestrecken von beträchtlicher Länge, wodurch die Genauigkeit der Ablesungen auf der u -Skala beeinträchtigt wird.

Auch für $c_1/c_2 > 0$ teilt die v -Skala die skalentragenden Bereiche derart in zwei Teilbereiche, daß der eine Teil nur x -Skalen, der andere nur y -Skalen enthält. Doch liegen jetzt die x -Skalen in dem Bereich, der von den Skalen für u und v begrenzt wird (Bild 2). Es ist jedoch nicht erforderlich, beide Nomogrammtypen zu konstruieren. Bezeichnet man nämlich mit ξ^-, η^-

¹³⁾ Erst wenn der Abstand der Skalen für u und v gegen Unendlich strebt, geht das Verhältnis der Breiten und das der maximalen Ordinaten der Begrenzungskurven gegen 1.

bzw. ξ^+ , η^+ die Parameterdarstellung der skalentragenden Kurven bei negativem bzw. positivem Verhältnis c_1/c_2 , so bestehen folgende Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \xi^-(x, k_c^2) &= \xi^+(y, k_c'^2), & \xi^-(y, k_c'^2) &= \xi^+(x, k_c^2), \\ \eta^-(x, k_c^2) &= \eta^+(y, k_c'^2), & \eta^-(y, k_c'^2) &= \eta^+(x, k_c^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7,2).$$

Für die u -Ablesungen gilt wegen (2,20)

$$g_2^-(u, k_c^2) = g_2^+(-u, k_c'^2) \dots \dots \dots (7,3).$$

Bezüglich der u -Skalen vgl. 11.

b) $w = \ln cn(z, k_c^2)$, senkrechte Skalen für u und v

Die Skalen für x und y liegen auf Hyperbeln, da stets $J_2(k_c^2) < 0$ wird. Man erhält für $c_1/c_2 = -0,25$ eine gleichmäßige Verteilung der Kurven über das ganze Intervall $0 < k_c^2 < 1$. Aus diesem Nomogramm gewinnt man durch eine geeignete Drehung der Trägergeraden der v -Skala ein abgewandeltes Nomogramm mit qualitativ analogen Eigenschaften: Es wandern alle Skalenpunkte der Skalen für x und y auf Parallelen zur u -Skala. Man erreicht dadurch, daß Ablesegeraden, die vorher parallel zur u -Skala wurden und daher keine oder schleifende Schnitte ergaben, jetzt zu Ablesungen führen (s. hierzu Bild 3).

8. Diskussion über die erforderlichen Nomogrammtypen für den Bereich $0,05 \leq k^2 \leq 0,95$

Die Ermittlung von Funktionswerten der JACOBI'schen elliptischen Funktionen kann mit Hilfe von Nomogrammen folgender Funktionen erfolgen:

a) $w = am(z, k^2)$, $0,05 \leq k^2 \leq 0,95$

Die x - und y -Skalen liegen auf den Kegelschnitten eines Büschels mit vier reellen Grundpunkten. (Beispiele: Bilder 1, 5, 6, 9, 10, 13.) Ein solches Nomogramm erlaubt unmittelbar die Ermittlung der Funktionswerte des elliptischen Integrals erster Gattung und außerdem in Verbindung mit Nomogrammen für $w = \sin z$ bzw. $w = \cos z$ (s. hierzu [2], [3], [4]) die Ablesung von $w = sn z$ und $w = cn z$. Schließlich kann man noch die Werte von $w = dn z$ ermitteln, wenn man an $w = am z$ und $w = \sin z$ ein Nomogramm der Funktion $a\omega^2 + b\zeta^2 = 1$ anschließt [1], [6]. Für die Nomogramme der Funktionen $w = \sin z$, $\cos z$, e^z , $\ln z$ liegt bereits ein Tafelwerk vor [7].

b) $w = \ln cn(z, k_c^2)$, $0,05 \leq k_c^2 \leq 0,95$

Die Skalen für x und y liegen auf den Kegelschnitten eines Büschels mit zwei reellen Grundpunkten. (Beispiel: Bild 2.) Ein solches Nomogramm erlaubt in Verbindung mit einem Nomogramm für $w = e^z$ die Ablesung von Funktionswerten der Funktion $w = cn(z, k_c^2)$ und, wenn man ein Nomogramm der Funktion $\alpha\omega^2 + \beta\zeta^2 = 1$ anschließt, die Ermittlung der Werte von $w = sn z$ und $w = dn z$.

Es kommt nun darauf an, aus den vorstehenden Typen eine genügende Anzahl von Nomogrammen so auszuwählen, daß sie sich hinsichtlich der Ablesemöglichkeiten sowohl für x , y als auch für u , v ergänzen. Dazu hat man zweckmäßig für jeden darzustellenden Wert von k^2 eine genügend große Mannigfaltigkeit von Wertepaaren x_{m_1}, y_{m_2} (5.), möglichst gleichmäßig über die Intervalle $0 < x_{m_1} < K$, $0 < y_{m_2} < K'$ verteilt, auszuwählen, und zu jedem Wertepaar x_{m_1}, y_{m_2} ein Nomogramm des Typus a) oder des Typus b) und zwar mit parallelen oder mit aufeinander senkrechten Skalen für u und v zu konstruieren, je nachdem, wie sich die beste Ablesemöglichkeit ergibt. Nomogramme mit parallelen Skalen für u und v sind günstig für solche Paare x_{m_1}, y_{m_2} , deren Ablesegeraden zu nicht zu großen v -Werten führen. Nomogramme mit aufeinander senkrechten Skalen für u und v erlauben dagegen gerade die Ablesung von größeren v -Werten (Gln. (2,3) bzw. (2,11)). Die Nomogramme des Typus b) sind besonders geeignet für Wertepaare x, y in einer größeren Umgebung von $x = K/2$ bzw. $y = K'/2$, da sie dort für alle k_c^2 den größten Teilstrichabstand zu vorgegebener Argumentdifferenz besitzen (7.). Man wird daher für Ablesungen in einer genügend großen Umgebung von $x = K/2$ und $y = K'/2$ zweckmäßig ein Nomogramm des Typus b) anlegen (Bild 2). Zum beiderseitigen Anschluß an diesen Bereich sind eine entsprechende Anzahl von Nomogrammen des Typus a) anzufertigen. Die hier angeführten Bilder 1, 5, 9, 10 (mit parallelen Skalen für u und v), 6, 13 (mit aufeinander senkrechten Skalen für u und v) dienen nur als Beispiele für eine solche Auswahl. Bei Bild 5 liegt z. B. x_{m_1} für $k^2 = 0,8$ etwa bei 0,5, y_{m_2} für $k^2 = 0,2$ etwa bei 0,5. Bei Bild 1 liegt x_{m_1} für $k^2 \geq 0,5$ so, daß die Skala in der Umgebung von $x = K$ noch genauere Ablesungen erlaubt, usf. Bei den Nomogrammen des Typus a) erfolgt die Abnahme der Teilstrichabstände zu den Grundpunkten hin in anderer Weise als bei den Nomogrammen des Typus b). So ist z. B. für die Kurve $k^2 = 0,9$ bei Bild 2 der Teilbogen zwischen den Argumenten 0 und 1 etwa halb so groß wie der Teilbogen zwischen 1

und 1,3, während bei Bild 9 das Verhältnis etwa umgekehrt ist. Bei Bild 10 ist für dieselbe Kurve das Verhältnis sogar etwa 3:1. Bei diesem Nomogramm ist $K/4 < x_{m_1} < K/2$ für $k^2 > 0,5$, $K'/4 < y_{m_2} < K'/2$ für $k^2 < 0,5$.

Zu der Forderung, daß die Werte x und y möglichst genau ablesbar sein sollen, tritt gleichberechtigt die Forderung nach einer möglichst genauen Ablesung der Werte u und v . Verwendet man die Nomogramme zur Ermittlung von Funktionswerten der JACOBI-Funktionen, so kommt es auf günstige Schnitte der durch die Skalenpunkte x und y festgelegten Ablesegeraden mit der u - und der v -Skala an. Die Nomogramme des Typus b) (Bild 2) ergeben für x - und y -Werte, deren Betrag nicht allzu verschieden ist, Ablesegeraden, die die Skalen für u und v unter einem Winkel $\alpha - \left(\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ — schneiden. (Das zu Bild 3 analoge Nomogramm ergibt eine günstige Lage der Ablesegeraden gerade in den Fällen, in denen eine u -Ablesung bei Bild 2 nicht mehr möglich ist, d. h. für große Werte von u .) Von den Nomogrammen des Typus a) führt Bild 10 für Werte von x und y von vergleichbarem Betrag ebenfalls zu einer die u - und die v -Skala unter einem Winkel $\alpha - \left(\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ — schneidenden Ablesegeraden.

Bei Bild 9 erhält man für x - und y -Werte von etwa vergleichbarem Betrag Ablesegeraden, die die u - und die v -Skala etwa unter $\alpha = \frac{\pi}{4}$ schneiden. Für kleinere Werte von y und größere

Werte von x erhält man günstige, d. h. nahezu senkrechte Schnitte. Für diese Bereiche ist daher Bild 9 besser geeignet als Bild 1 oder 10. Bild 13 führt zwar in der vorliegenden Form stets zu ungünstigen Schnitten mit der u -Skala. Es ist jedoch nur als Prinzipbild zu betrachten. Man gewinnt durch Abänderung der Formgebungskonstanten aus ihm ein sowohl für u - als auch v -Ablesungen recht günstiges Nomogramm mit ebenso günstigen Ablesemöglichkeiten für x und y wie Bild 13. Es wurde jedoch aus Gründen des Platzbedarfs hier nicht aufgenommen.

Werden die Nomogramme zur Ablesung von Funktionswerten des elliptischen Integrals erster Gattung

$$z = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

benutzt, so kommt es auf einen günstigen Schnitt der durch u und v festgelegten Ablesegeraden mit den Kurven für x und y an. Es zeigt sich jetzt z. B., daß die Bilder 9 und 10 für große u und kleine v zu günstigeren Schnitten der u - v -Ablesegeraden mit den Skalen für x und y führen als der in Bild 13 dargestellte Typus.

Für die u - und die v -Skala wäre nun die zu 5. analoge Untersuchung anzustellen. Wegen des einfachen Aufbaus dieser Skalengleichungen erkennt man aber sofort: Bei Nomogrammen mit parallelen Skalen für u und v bewirkt eine Abänderung der Formgebungskonstanten nur eine Ähnlichkeitstransformation der u - und der v -Skala. Bei Nomogrammen mit aufeinander senkrechten Skalen für u und v kann in $G_1(u)$, $G_2(v)$ ein Pol auftreten, dessen Argument von den zugehörigen Formgebungskonstanten abhängt. Für Argumente in einer gewissen Umgebung des Poles ergibt sich eine besonders günstige Ablesemöglichkeit.

Neben den beiden genannten Typen von Fluchtliniennomogrammen stehen die in 4. genannten Nomogramme mit Kreisen als Ablesekurven. Das in Bild 7 dargestellte *Nomogramm mit Strophoiden* als Trägern der Skalen für x und y hat den Vorzug, daß diese Skalen für den Bereich $-\infty < k^2 < +\infty$ sowie die u - und die v -Skala ganz im Endlichen verlaufen. Außerdem nehmen $\left|\frac{ds}{dx}\right|$ und $\left|\frac{ds}{dy}\right|$ von den Werten $x_{m_1} = K/2$ bzw. $y_{m_2} = K'/2$ nach den jeweiligen Grundpunkten zu weniger stark ab als bei den Fluchtliniennomogrammen. Die Abstände der Skalenpunkte in der Umgebung der Grundpunkte sind noch so günstig, daß für Argumentwerte im Intervall $0,1 \leq x \leq (K - 0,1)$ bzw. $0,1 \leq y \leq (K' - 0,1)$ an einem einzigen Nomogramm abgelesen werden kann, während man zur Überdeckung des gleichen Argumentbereichs mehrere Fluchtliniennomogramme anlegen muß. Daher kommt man mit einem einzigen Nomogrammbblatt dieser Art aus, das trotz der umständlicheren Ablesevorschrift für Zwecke der Übersicht zusätzlich zu den Fluchtliniennomogrammen Verwendung finden kann.

9. Nomogramme zur Ermittlung von Funktionswerten für die Bereiche $0 < k^2 < 0,05$ und $0,95 < k^2 < 1$

Bei den in 8. behandelten Nomogrammen für den Bereich $0,05 \leq k^2 \leq 0,95$ drängen sich die x -Skalen für k^2 -Werte in der Nähe von Null und die y -Skalen für k^2 -Werte in der Nähe von 1 immer mehr zusammen. Daher sind die bisher behandelten Nomogrammtypen zur Ermittlung

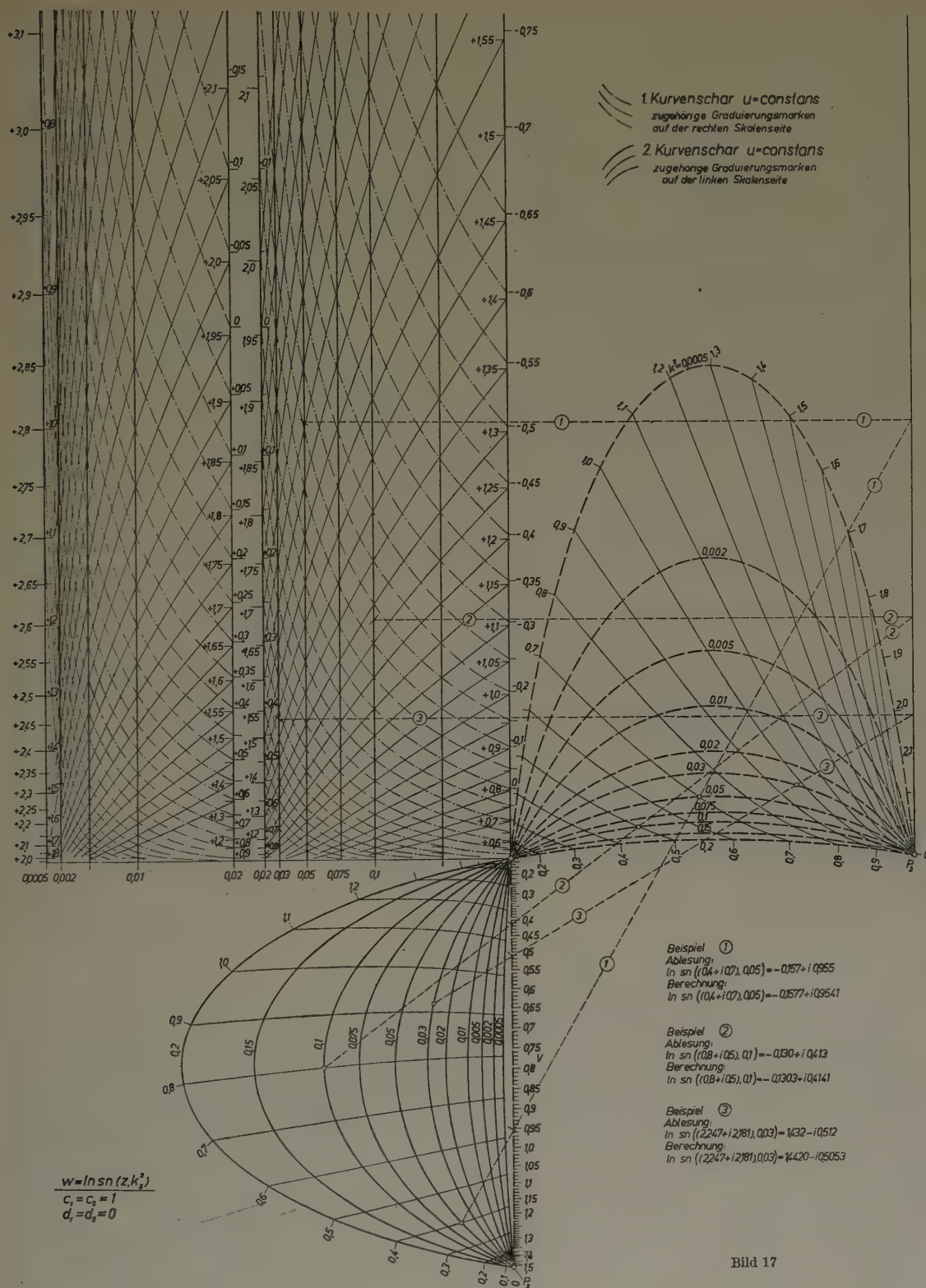


Bild 17

von Funktionswerten in den Bereichen $0 < k^2 < 0,05$ und $0,95 < k^2 < 1$ wenig geeignet. Um die Werte der JACOBI-Funktionen auch in diesen Bereichen mittels eines Nomogramms ermitteln zu können, bringt man noch die Funktionen $w = \ln \operatorname{sn}(z, k_s^2)$ und $w = \ln \operatorname{dn}(z, k_d^2)$ zur Darstellung. Denn vermöge der in 1. behandelten und in Tabelle 1 angegebenen Modultransformationen sind kleinen Werten von k_s^2 und solchen von k_d^2 , die nahe bei 1 liegen, für die Darstellung günstigere Werte von k_{am}^2 der äquivalenten Funktion $w = \operatorname{am}(z, k_{am}^2)$ zugeordnet (Tabelle 2).

Tabelle 2

$k_s^2 = 1 - k_d^2$	k_{am}^2	
	$\varepsilon = +1$	$\varepsilon = -1$
0,0005	0,08557	— 0,09358
0,001	0,11886	— 0,13489
0,002	0,16390	— 0,19603
0,003	0,19693	— 0,24521
0,005	0,24672	— 0,32753
0,0075	0,29339	— 0,41522
0,01	0,33058	— 0,49383
0,02	0,43499	— 0,76738
0,03	0,50336	— 1,01355
0,05	0,59740	— 1,48386
0,5	0,97057	— 32,97127

ein zu $\varepsilon = -1$ gehöriges Nomogramm für den Bereich $0,0005 \leq k_s^2 \leq 0,2$. (Die zu Bild 9 gehörigen Formgebungskonstanten würden das zu Bild 17 gewendet kongruente Nomogramm mit $\varepsilon = +1$ liefern.) Bezüglich der u -Skalen s. 11. Für die Ablesung auf den u -Skalen vergleiche das zu Bild 2 Gesagte, wegen der Doppeldeutigkeit der Ablesung siehe 12.

An einem solchen Nomogramm kann auch die Funktion $w = \ln dn(z, k_d^2)$ abgelesen werden. Dabei ist

$$k_s = -k_d', \quad x_d = -y_s, \quad y_d = x_s.$$

Die in Tabelle 1 angegebenen Modulzuordnungen ermöglichen auch die Konstruktion von Nomogrammen, die besonders für die Bereiche $-0,05 < k_f^2 < 0$ und $1 < k_f^2 < 1,05$ geeignet sind.

10. Nomogramme zur Ablesung bei kleinen Argumentwerten x und y sowie Werten x bzw. y nahe an K bzw. K'

Bei allen bisher behandelten Nomogrammen lagen die Werte x_{m_i} bzw. y_{m_i} (5.) im Innern des Intervalls $0 < x < K$ bzw. $0 < y < K'$. Daher war die zu einem festen Argumentschritt Δx bzw. Δy gehörige Bogenlänge Δs in der Umgebung der Grundpunkte besonders klein. Able- sungen von Argumentwerten in den Teilintervallen $0 < x$ bzw. $y < 0,2$ und $(K - 0,2) < x < K$ bzw. $(K' - 0,2) < y < K'$ waren daher mit geringerer Genauigkeit möglich als solche in den anderen Teilbereichen der Intervalle $0 < x < K$ bzw. $0 < y < K'$. Wählt man aber die Form- gebungskonstanten so, daß einer der drei Grundpunkte P_i ($i = 1, 2, 3$) zum Fernpunkt wird, so gehen $x_{m_1} \rightarrow 0$ bzw. $x_{m_1} \rightarrow K$ und $y_{m_2} \rightarrow K'$ bzw. $y_{m_2} \rightarrow 0$. Dies ist nur bei Nomogrammen mit senkrechten Skalen für u und v möglich. Dazu setzt man

- a) $P_1 \rightarrow \infty$ $c_1 = 1$, $d_1 = -1$, $c_2 = 1$, $d_2 = 0$
 b) $P_2 \rightarrow \infty$ $c_1 = 1$, $d_1 = 1$, $c_2 = 1$, $d_2 = 0$
 c) $P_3 \rightarrow \infty$ $c_1 = 1$, $d_1 = 0$, $c_2 = 1$, $d_2 = -1$.

Ändert man die vorstehenden Annahmen so ab, daß

- a) $d_1 = -1,02$ b) $d_1 = +1,02$ c) $d_2 = -1,02$,

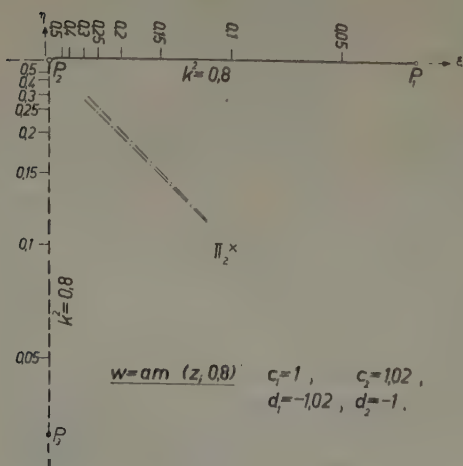


Bild 18

Gemäß Tabelle 1 und 2 ergibt sich eine zwei- fache Darstellungsmöglichkeit von $w = \ln sn(z, k_s^2)$. Es kann nämlich dem Modul $0 < k_s^2 < 1$ sowohl ein Wert k_{am}^2 im Bereich $0 < k_{am}^2 < 1$ als auch ein Wert $k_{am}^2 < 0$ zugeordnet werden. Jedoch gibt es zu einem jeden zu $\varepsilon = -1$ gehörigen Nomogramm mit den Formgebungskonstan- ten c_i, d_i ein zweites zu $\varepsilon = +1$ gehöriges mit Formgebungskonstanten \bar{c}_i, \bar{d}_i derart, daß die Nomogramme (gewendet) kongruent sind. Man kann daher zur Anlage der Nomogramme je nach Zweckmäßigkeit den Fall $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ auswählen. Die Anzahl der anzulegenden Nomo- gramme wird nach den Ausführungen zum Typus a) in 8. bestimmt. Als Beispiel gibt Bild 17

so erhält man Nomogramme mit eigentlichen Grund- punkten, für die x_{m_i} bzw. y_{m_i} genügend nahe an 0 oder K bzw. K' liegen. Bild 18 zeigt die Kurve $k^2 = 0,8$ eines solchen Nomogramms, das zur Ablesung kleiner Werte von x und y geeignet ist ($c_1 = 1$, $d_1 = -1,02$, $c_2 = 1,02$, $d_2 = -1$). Da die zu verschiedenen k^2 ge- hörigen Skalen jetzt sehr eng liegen, muß für jedes k^2 ein gesondertes Blatt angelegt werden. Man beachte die Gestalt des Polardreiecks $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$, von dem die Seiten $\Pi_2 \Pi_1$ und $\Pi_2 \Pi_3$ eingezeichnet sind.

11. Die Abhängigkeit der u -Skalen vom Modulwert k_f^2

Die in Tabelle 1 angegebenen Transformationen der abhängigen Veränderlichen für $w = \ln sn(z, k_s^2)$, $w = \ln cn(z, k_s^2)$ und $w = \ln dn(z, k_s^2)$ zeigen eine Ab- hängigkeit vom Modulwert k_f^2 . Hieraus errechnen sich aus $g_1(u_{am})$, $g_2(v_{am})$ die Skalenfunktionen $g_1(v_f)$, $g_2(u_f)$ für die genannten Funktionen.

So erhält man bei Nomogrammen mit vier reellen Grundpunkten und parallelen Skalen für u und v :

$$g_1(v_f) = c_1 \cos 2 v_f + d_1 \dots \dots \dots (11,1)$$

$$g_1(v_f) = -c_1 \cos 2 v_f + d_1 \dots \dots \dots (11,2),$$

$$g_2(u_f) = \frac{c_2}{2} \left(k^* e^{2u_f} + \frac{1}{k^*} e^{-2u_f} \right) + d_2 \dots \dots \dots (11,3),$$

wobei k^* die aus Tabelle 1 für $\Delta_1 > 0$ zu entnehmende Bedeutung hat. Für die v -Skala gilt (11,1) in folgenden Fällen:

$$\begin{aligned} w &= \ln \operatorname{sn}(z, k_s^2), & k_s^2 > 0, & \varepsilon = -1, \\ w &= \ln \operatorname{cn}(z, k_c^2), & k_c^2 < 0, & \varepsilon = -1; & k_c^2 > 1, & \varepsilon = -1, \\ w &= \ln \operatorname{dn}(z, k_d^2), & k_d^2 < 1, & \varepsilon = +1; \end{aligned}$$

(11,2) gilt in folgenden Fällen:

$$\begin{aligned} w &= \ln \operatorname{sn}(z, k_s^2), & k_s^2 > 0, & \varepsilon = +1, \\ w &= \ln \operatorname{cn}(z, k_c^2), & k_c^2 < 0, & \varepsilon = +1; & k_c^2 > 1, & \varepsilon = +1, \\ w &= \ln \operatorname{dn}(z, k_d^2), & k_d^2 > 1, & \varepsilon = -1. \end{aligned}$$

Dabei ist noch v_{dn} mit -1 zu multiplizieren.

Bei Nomogrammen mit zwei reellen Grundpunkten und parallelen Skalen für u und v ergibt sich auf demselben Wege:

$$g_1(v_f) = \varepsilon_1 c_1 \cos 2 v_f + d_1 \dots \dots \dots (11,4),$$

$$g_2(u_f) = \frac{c_2}{2} \left(\frac{k^{*'}}{k^*} e^{2u_f} - \frac{k^*}{k^{*'}} e^{-2u_f} \right) + d_2 \dots \dots \dots (11,5),$$

wobei k^* die aus Tabelle 1 für $\Delta_1 < 0$ zu entnehmende Bedeutung hat und $\varepsilon_1 = +1$ für $w = \ln \operatorname{cn} z$ (Tabelle 1, 2c) und $w = \ln \operatorname{dn} z$ (3c), $\varepsilon_1 = -1$ für $w = \ln \operatorname{sn} z$ (1c), z. B. ist $k^{*2} = k_c'^2$ für $\varepsilon = -1$ und $k^{*2} = k_c^2$ für $\varepsilon = +1$.

Für Nomogramme mit aufeinander senkrechten Skalen für u und v erhält man aus (11,1) oder (11,2) und (11,3) bzw. (11,4) und (11,5)

$$G_1(v_f) = -1/g_1(v_f) \quad \text{und} \quad G_2(u_f) = -1/g_2(u_f).$$

Es gehört also bei $w = \ln \operatorname{sn} z$, $w = \ln \operatorname{cn} z$, $w = \ln \operatorname{dn} z$ zu jedem Modulwert und damit zu jedem Kegelschnitt als Träger der zugehörigen x - und y -Skala eine besondere u -Skala. Siehe hierzu die Bilder 2 und 17; die eingezeichneten Kurven konstanten Argumentwertes erlauben eine Interpolation zwischen den Modulwerten.

12. Die Mehrdeutigkeit der Ablesungen

Bei allen dargestellten Funktionen ist eine der geradlinigen Skalen nach einer trigonometrischen Funktion vom Argument $2u$ bzw. $2v$ beschriftet. Dies führt zu einer unendlichen Vieldeutigkeit der Ablesungen, indem der Wert u bzw. v zunächst nur bis auf ganzzahlige Vielfache von π bestimmt ist. Wegen der anschließenden Zusammensetzung mit den Funktionen $w = \sin z$ bzw. $w = e^z$ (8.) lassen sich alle Werte, die sich um Vielfache von 2π unterscheiden, als äquivalent ansehen. Dagegen sind solche Werte, die sich um ungerade Vielfache von π unterscheiden, als verschieden anzusehen, ebenfalls Werte von verschiedenen Vorzeichen, so daß eine Vierdeutigkeit der Ablesungen verbleibt. Welcher von vier möglichen Werten u , $u + \pi$, $-u$, $-u - \pi$ bzw. v , $v + \pi$, $-v$, $-v - \pi$ abzulesen ist, hängt von dem Wert der Argumente x und y ab. Analog ergeben sich für die Punkte der nicht trigonometrisch beschrifteten geradlinigen Skala bei $w = am z$ und $w = \ln \operatorname{sn} z$ zwei mögliche Beschriftungen. Bei $w = am z$ unterscheiden sie sich nur durch das Vorzeichen, bei $w = \ln \operatorname{sn} z$ hängen sie, wie (11,3) zeigt, in verwickelterer Weise zusammen.

Die Gewinnung der eindeutigen Zuordnungsvorschrift zwischen x, y und u, v sei für $w = am z$ sowie $w = \ln \operatorname{sn} z$ kurz dargelegt. Nach 2. trägt jeder Punkt der y -Skala eines Nomogramms für $w = am z$ eine abzählbar unendliche Folge von Beschriftungsziffern, von denen wegen der Periodizität der Funktion nur zwei wesentlich verschieden sind, nämlich $y_1 = y$ mit $0 \leq y_1 \leq K'$ und $y_2 = 2K' - y_1$ und damit gleichwertig y_1 und $-y_1$. Dabei gehören zu $x = 0$, $0 \leq y \leq K'$ auch $u = 0$, $v > 0$, zu $x = 0$, $0 > -y > -K'$ aber $u = 0$, $v < 0$.

In einem Nomogramm für $w = \ln \operatorname{sn} z$ (Bild 17) beginnt die Beschriftung der y -Skala mit $y = 0$ im einen Grundpunkt und endet mit $y = K'/2$ im zweiten Grundpunkt. Dann läuft sie

wieder zurück zum ersten Grundpunkt, der jetzt den Wert $y = K'$ trägt. Ist $0 < y < K'/2$, so tragen die Punkte der y -Skala die beiden wesentlich verschiedenen Beschriftungsziffern y und $K' - y$. Die Punkte der x -Skala tragen mit $0 \leq x \leq K$ die vier wesentlich verschiedenen Beschriftungsziffern x und $2K - x$, $-x$ und $-2K + x$. Die Ablesegerade ändert sich nicht, wenn man die Argumente x durch $2K - x$ und y durch $K' - y$ ersetzt. Durch die erste Ersetzung ändert der Imaginärteil von $w = \ln \operatorname{sn} z$ das Vorzeichen. Durch die zweite Ersetzung wird der Realteil u in einen neuen Wert $u_1 \neq -u$ übergeführt usf. Dies zeigen die beiden verschiedenen Scharen von Kurven $u = \text{const}$ in Bild 17.

Durch solche Überlegungen gelangt man insgesamt zu der in Tabelle 3 angegebenen Zuordnungsvorschrift der Werte von u und v zu den Werten von x und y und umgekehrt. (Bei $w = am(\beta z, k^2)$, β^2, k^2 komplex, ist für

$$-\sqrt{\frac{k^* k'^*}{2}} K(k^{*2}) < x < +\sqrt{\frac{k^* k'^*}{2}} K(k^{*2}) \text{ und } -\sqrt{\frac{k^* k'^*}{2}} K'(k^{*2}) < y < +\sqrt{\frac{k^* k'^*}{2}} K'(k^{*2})$$

die Ablesung eindeutig (Bilder 3 und 8).)

Tabelle 3

	x -Intervall	y -Intervall	u -Ablesung	v -Ablesung
$w = am(z, k^2)$ (k^2 reell)	$0 < x < K(k^2)$	$0 < y < K'(k^2)$ $-K'(k^2) < y < 0$	$0 < u < \frac{\pi}{2}$ $0 < u < \frac{\pi}{2}$	$v > 0$ $v < 0$
	$K(k^2) < x < 2K(k^2)$	$0 < y < K'(k^2)$ $-K'(k^2) < y < 0$	$\frac{\pi}{2} < u < \pi$ $\frac{\pi}{2} < u < \pi$	$v > 0$ $v < 0$
	$-K(k^2) < x < 0$	$0 < y < K'(k^2)$ $-K'(k^2) < y < 0$	$-\frac{\pi}{2} < u < 0$ $-\frac{\pi}{2} < u < 0$	$v > 0$ $v < 0$
	$-2K(k^2) < x < -K(k^2)$	$0 < y < K'(k^2)$ $-K'(k^2) < y < 0$	$-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$	$v > 0$ $v < 0$
$w = \ln \operatorname{sn}(z, k_s^2)$	$0 < x < K(k_s^2)$	$0 < y < \frac{K'(k_s^2)}{2}$ $\frac{K'(k_s^2)}{2} < y < K'(k_s^2)$ $-\frac{K'(k_s^2)}{2} < y < 0$ $-K'(k_s^2) < y < -\frac{K'(k_s^2)}{2}$	1. Kurvenschar 2. Kurvenschar 1. Kurvenschar 2. Kurvenschar	$0 < v < \frac{\pi}{2}$ $0 < v < \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < v < 0$ $-\frac{\pi}{2} < v < 0$
	$K(k_s^2) < x < 2K(k_s^2)$	$0 < y < \frac{K'(k_s^2)}{2}$ $\frac{K'(k_s^2)}{2} < y < K'(k_s^2)$ $-\frac{K'(k_s^2)}{2} < y < 0$ $-K'(k_s^2) < y < -\frac{K'(k_s^2)}{2}$	1. Kurvenschar 2. Kurvenschar 1. Kurvenschar 2. Kurvenschar	$-\frac{\pi}{2} < v < 0$ $-\frac{\pi}{2} < v < 0$ $0 < v < \frac{\pi}{2}$ $0 < v < \frac{\pi}{2}$
	$-K(k_s^2) < x < 0$	$0 < y < \frac{K'(k_s^2)}{2}$ $\frac{K'(k_s^2)}{2} < y < K'(k_s^2)$ $-\frac{K'(k_s^2)}{2} < y < 0$ $-K'(k_s^2) < y < -\frac{K'(k_s^2)}{2}$	1. Kurvenschar 2. Kurvenschar 1. Kurvenschar 2. Kurvenschar	$\frac{\pi}{2} < v < \pi$ $\frac{\pi}{2} < v < \pi$ $-\pi < v < -\frac{\pi}{2}$ $-\pi < v < -\frac{\pi}{2}$
	$-2K(k_s^2) < x < -K(k_s^2)$	$0 < y < \frac{K'(k_s^2)}{2}$ $\frac{K'(k_s^2)}{2} < y < K'(k_s^2)$ $-\frac{K'(k_s^2)}{2} < y < 0$ $-K'(k_s^2) < y < -\frac{K'(k_s^2)}{2}$	1. Kurvenschar 2. Kurvenschar 1. Kurvenschar 2. Kurvenschar	$-\pi < v < -\frac{\pi}{2}$ $-\pi < v < -\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2} < v < \pi$ $\frac{\pi}{2} < v < \pi$
$w = \ln \operatorname{cn}(z, k_c^2)$	$0 < x < K(k_c^2)$	$0 < y < K'(k_c^2)$ $-K'(k_c^2) < y < 0$	eindeutig	$-\frac{\pi}{2} < v < 0$ $0 < v < \frac{\pi}{2}$
	$K(k_c^2) < x < 2K(k_c^2)$	$0 < y < K'(k_c^2)$ $-K'(k_c^2) < y < 0$	eindeutig	$-\pi < v < -\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2} < v < \pi$
	$-K(k_c^2) < x < 0$	$0 < y < K'(k_c^2)$ $-K'(k_c^2) < y < 0$	eindeutig	$0 < v < \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < v < 0$
	$-2K(k_c^2) < x < -K(k_c^2)$	$0 < y < K'(k_c^2)$ $-K'(k_c^2) < y < 0$	eindeutig	$\frac{\pi}{2} < v < \pi$ $-\pi < v < -\frac{\pi}{2}$

Schlußbemerkung

Die vorstehenden Untersuchungen bilden die Grundlage für die Herstellung eines Nomogrammwerkes, das eine Ermittlung der Funktionswerte elliptischer Funktionen und Integrale eines komplexen Arguments mit einem Höchstmaß an erreichbarer Genauigkeit gestattet und das in absehbarer Zeit erscheinen wird.

In den meisten Bildern der vorstehenden Arbeit sind Ablesebeispiele eingetragen und zum Vergleich die mit Hilfe einer Tafel errechneten Funktionswerte angegeben. Die hier erreichte Ablesegenauigkeit läßt sich für das Nomogrammwerk durch Darstellung in großem Maßstab sowie zeichnen- und reproduktionstechnische Maßnahmen noch beträchtlich steigern.

Die für die Untersuchungen im II. Teil dieser Arbeit und zur Konstruktion der Bilder 9 und 17 erforderlichen umfangreichen numerischen Rechnungen wurden durch Gewährung von Rechenzeit aus der Spende zur Förderung der Wissenschaft auf der IBM 704 ermöglicht. Diese Rechnungen lieferten darüber hinaus die Unterlagen für den Entwurf zahlreicher weiterer Nomogramme zu 8. und 9., die hier aus Platzgründen keine Aufnahme finden können (s. hierzu auch [6]). Über die für diese Untersuchungen im Rechenzentrum der TH Aachen entwickelte Methode zur elektronischen Berechnung von Funktionswerten JACOBI'scher elliptischer Funktionen wird gesondert berichtet. Dem beratenden Komitee zur Verwaltung der Spende und dem Institut Européen de calcul scientifique in Paris sei der verbindlichste Dank zum Ausdruck gebracht.

Frau Stud. Ass. E. HAUPT danke ich für die Unterstützung bei den vorstehenden theoretischen Untersuchungen sowie bei der Berechnung und Konstruktion aller veröffentlichten Nomogramme, Herrn Dipl. Math. D. HAUPT danke ich für die Programmierung der Rechnungen auf der IBM 704.

Literatur

- [6] F. REUTTER, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 912, 1960.
[7] J. RYBNER, Nomograms of Complex Hyperbolic Functions, 2 nd. edition, Copenhagen 1955.

Manuskripteingang: 24. 7. 1959

Anschrift: Prof. Dr. F. REUTTER, Math. Inst. der TH Aachen, Lehrstuhl B, Aachen, Templergraben 55

ZAMM 40 (1960) Heft 12, Seite 541—550

The Use of Poisson's Ratio in Studying Certain Non-Homogeneous Elastic Inclusions

By R. J. KNOPS

Das elastische Feld wird ermittelt für inhomogene Einschlüsse in beliebig belasteten inhomogenen Matrizen, wobei die Scherungsmoduli der beiden Medien, nicht jedoch ihre Poissonsche Zahlen als gleich vorausgesetzt werden. Bei der hier gewählten Methode wird der Unterschied zwischen den ungestörten und den gestörten Zuständen der Matrize untersucht, was zur Auffindung der Diskontinuitäten in den Spannungen und Deformationen führt. Die Diskussion inkompressibler Medien zeigt, daß die entwickelte Theorie geringer Modifikationen bedarf. Für eine einzige elliptische Einschliefung wird das Problem gelöst. Auf Beziehungen zu anderen Problemen wird hingewiesen.

The elastic field is established for non-homogeneous inclusions bonded to a non-homogeneous, arbitrarily stressed matrix whose Poisson's ratio but not shear modulus is different to those of the inclusions. The procedure adopted examines the difference in the unperturbed and perturbed states of the matrix and enables the discontinuities in the stresses and strains to be found. Incompressible media are discussed and show that slight modifications are required to the theory. A new problem is solved for the single ellipsoidal inclusion and relations with other topics are noted.

Устанавливается эластичное поле для неоднородных включений, содержащихся в неоднородной, подвергнутой произвольному напряжению, матрице, отличающейся постоянной Пуассона но не модулем сдвига от включений. При помощи принятого здесь приема изучается разница в невозмущенном и возмущенном состояниях и находится возможность определить разрывы в силах напряжения и растяжения. Проводятся рассуждения о несжимаемых средах и показывается, что теория нуждается в некоторых небольших видоизменениях. Далее решается новая задача для включения эллипсоидной формы и обращается внимание на связи с другими вопросами.

1. The Perturbed Field

Consider any number of finite non-homogeneous inclusions bonded to an infinite arbitrarily stressed non-homogeneous matrix whose Poisson's ratio but not shear modulus is different to those of the inclusions. "Bonded" is here intended to mean that the displacement and traction across the interface separating an inclusion from the matrix remain continuous throughout the

deformation. The non-homogeneity of the material is caused by a variation in POISSON'S ratio but not the shear modulus which has the same *uniform value* in both the inclusions and matrix.

We examine in this section properties of the stresses and displacement formed from the difference of those for the perturbed and unperturbed stressed matrix. Once the unperturbed state is known a knowledge of these *difference* components, as they will be called, evidently enables the complete elastic field in the perturbed state to be obtained. Equations for the difference components are established by subtraction of appropriate ones in the perturbed and unperturbed states but before this can be done, these two sets of equations must be derived.

In the unperturbed matrix it is assumed that POISSON'S ratio, ν varies continuously through the entire space so that effectively the inclusions are absent. The shear modulus, μ is uniform everywhere. The applied load is that specified originally and consists of body force $\bar{X} = (X_i)$ per unit volume together with certain constraints at infinity. The stresses σ_{ij} , strains ϵ_{ij} , and displacement vector $\bar{u} = (u_i)$ arising from this loading satisfy the following well-known equations of classical elasticity: the stress-equilibrium equations, the stress-strain relations and strain-displacement relations. Referred to rectangular cartesian co-ordinates (x_i) these become respectively

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \dots \dots \dots (1),$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad \dots \dots \dots (2),$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots \dots \dots (3)$$

In (2), δ_{ij} denotes the KRONECKER delta defined to have the value one if i equals j and zero otherwise; λ denotes the LAMÉ constant related to POISSON'S ratio and the shear modulus by

$$\lambda = 2\mu\nu/(1 - 2\nu).$$

When the displacement is single-valued the strains satisfy the six compatibility relations and ϵ_{kk} is the dilatation.

$$\sum_{k,l,m,n=1}^3 e_{iklm} \epsilon_{jln} \frac{\partial^2 \epsilon_{kl}}{\partial x_m \partial x_n} = 0 \quad \dots \dots \dots (4),$$

in which e_{ijk} is the alternating tensor taking the value 1 if i, j, k , is an even permutation of 1, 2, 3, and -1 if it is an odd permutation, but is otherwise zero.

Since the moduli are continuous these equations yield stresses, strains and displacement which are continuous everywhere except of course in the neighbourhood of singularities.

For the perturbed state of the matrix POISSON'S ratio varies discontinuously over the interfaces between the region occupied by the inclusions and the matrix, and we suppose that in these regions it takes the typical (variable) value ν' . The shear modulus has still the same uniform value throughout the medium. The stresses σ'_{ij} , strains ϵ'_{ij} , and displacement \bar{u}' formed in the medium satisfy equations similar to the set (1) - (4), except that now corresponding to POISSON'S ratio ν' , λ is replaced by λ' in an inclusion. These equations do not hold on the interfaces, where apart from the continuity of displacement and traction, other components are undefined.

The formulation of equations for the unperturbed and perturbed states is now complete and we turn to equations for the difference stresses and displacements. These quantities are given by σ''_{ij} and \bar{u}^* where

$$\sigma''_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma_{ij}, \quad \bar{u}^* = \bar{u}' - \bar{u}.$$

A set of strains ϵ^*_{ij} can be derived from \bar{u}^* according to (3), so that

$$\epsilon^*_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad \dots \dots \dots (5)$$

and if \bar{u}^* is single-valued, which certainly follows if u and u' are, then the strains are compatible in the sense of (4). The equation satisfied by the stress σ''_{ij} is found by taking the difference of the equilibrium equations (1) which leads to

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \dots \dots \dots (6),$$

showing that the difference stresses form an equilibrium distribution with no body force.

Subtraction of the appropriate stress-strain relations (2) gives

$$\sigma''_{ij} = \lambda' \epsilon^*_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon^*_{ij} + (\lambda' - \lambda) \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \dots \dots \dots (7),$$

and so the difference stresses are not related in the usual Hookean sense with the difference strains, ε_{ij}^* . Equation (7) holds both for inclusions and matrix if it is assumed, as will always be done, that λ' (or alternatively ν') becomes equal to λ (or ν) in the matrix. (7) is identical in structure to the stress-strain relations of thermoelasticity and provides the basis of a relationship discussed in Section 8. Now, since the difference strains are compatible for a single-valued displacement function \bar{u}^* they can be associated with a stress-distribution σ_{ij}^* through the stress-strain relations,

$$\sigma_{ij}^* = \lambda' \varepsilon_{kk}^* \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^* \quad \dots \dots \dots (8).$$

These stresses arise in the perturbed matrix if it is subjected to the strain-pattern ε_{ij}^* . By inserting (8) into (7) we see that

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^* + (\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \dots \dots \dots (9),$$

and substituting this value of σ'_{ij} into the equilibrium conditions (1) we further see that the stresses σ_{ij}^* form an equilibrium distribution under the action of a body-force $\text{grad}\{(\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk}\}$. By virtue of the equality of λ' and λ this body force vanishes in the matrix so that over each interface there is a discontinuity, and equilibrium is preserved by a layer of force acting over these surfaces.

To calculate the surface force imagine that inserted between each inclusion A and the matrix B is a small transitional zone C through which Poisson's ratio varies continuously from its value in A to its value in B . The body-force is now continuous in the whole space. Across the transitional zone it changes by an amount

$$\text{grad}\{(\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk}\} \cdot \delta \bar{r}$$

along the small radius vector $\delta \bar{r}$ from A to B . As C shrinks into the interface between A and B the distribution of force through C is replaced by one over the interface of amount

$$\bar{n} \cdot [(\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk}] \quad \dots \dots \dots (10),$$

where \bar{n} is the outward normal to an inclusion and the square brackets represent the jump in passing from the inclusion to the matrix. We may thus regard the difference displacement vector \bar{u}^* as arising from a compatible elastic state formed in the perturbed matrix subjected to a body-force $\text{grad}\{(\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk}\}$ through the region of the inclusions and forces (10) distributed over their surfaces. Conditions at infinity satisfied by this state are derived as follows. The perturbed and unperturbed state possess the same constraints at infinity so that the difference stresses and displacement vanish through those regions where they are originally defined. In the *difference displacement state*, therefore, the stresses, σ_{ij}^* , from (9) become equal to $-(\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ for those regions where the stress is originally defined with the displacement vanishing over the remainder. (Similar arguments serve for other types of boundaries conditions not considered here.)

The actual equation satisfied by \bar{u}^* can be obtained by inserting the stresses (7) or (9) into the respective equilibrium equations. This leads, as might be expected, to NAVIER's equation for a non-homogeneous POISSON's ratio with an additional body-force term:

$$\mu \nabla^2 \bar{u}^* + \text{grad}\{(\lambda' + \mu) \varepsilon_{kk}^*\} + \text{grad}\{(\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk}\} = 0 \quad \dots \dots \dots (11),$$

where ∇^2 denotes the LAPLACE operator. This equation could also be derived by subtracting the NAVIER equations for the unperturbed and perturbed states. A discussion of its solution is left until Section 3, since it is not required in establishing the discontinuities in σ_{ij}^* and ε_{ij}^* resulting from the layer of force over the interface. This topic is treated in the next section using only the properties arising from the structure of equations (8) and (11) and the continuity of \bar{u}^* . Incidentally, the continuity of the difference tractions across each interface is a superfluous condition in these deductions since it is equivalent to the presence of the layer-force (10).

2. Discontinuities in the perturbed field

To make ideas precise we consider a single inclusion A bonded to the matrix B with the separating interface denoted by S . The results obtained, however, continue to apply for any number of inclusions. The discontinuities are examined at an arbitrary point of S which is taken as the origin of a cartesian system of axes with positive z -axis along the outer normal. The x - and y -axes are in the tangent plane to S at the origin and touch the curves s and s' , respectively, drawn in the interface.

If \bar{u}^{**} is the difference displacement whose components (u^{**} , v^{**} , w^{**}) are referred to the (s , s' , z)-system of orthogonal curvilinear axes then it follows that since \bar{u}^{**} is continuous across S then $\partial \bar{u}^{**} / \partial s$ is also. At points of S the tangential normal strain ε_x^* can be expressed in terms of these components by the relation

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^{**}}{\partial s} - \frac{w^{**}}{\rho},$$

where ϱ is the radius of curvature to the curve s at the origin. But ϱ is the same on both sides A and B of the interface S and therefore ϵ_x^* is continuous across S . A similar analysis holds for ϵ_y^* and so we see that the perturbed normal strains tangential to an interface are continuous across that interface. This can be alternatively derived by operating directly on \bar{u}' .

Using the same method as for ϵ_x^* it can similarly be shown that all the tangential first derivatives of \bar{u}^* are continuous across S . From this follows the continuity of ϵ_{xy}^* and hence from (7) that of the shear stress σ_{xy}' . For the other two shear stresses σ_{xz} , σ_{zy} we recall that in the difference displacement state the layer force is everywhere normal to S so that a resolution of the stress tensor σ^* along the directions of x and y yields

$$[\sigma_{xz}^*] = [\sigma_{zy}^*] = 0,$$

and hence immediately from (9)

$$[\sigma_{zz}'] = [\sigma_{yy}'] = 0.$$

One other fact required later concerning the derivatives $\partial u^*/\partial z$, $\partial v^*/\partial z$ can be proved here. The continuity of σ_{xz}^* implies that of ϵ_{xz}^* , which from

$$\epsilon_{xz}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right)$$

and the continuity of $\partial w^*/\partial x$ established above in turn implies the continuity of $\partial u^*/\partial z$. A similar conclusion holds for $\partial v^*/\partial z$.

We now consider further properties of the difference displacement state which enable the remaining discontinuities to be derived. The layer-force produces in the stress-component σ_z^* a discontinuity of equal and opposite amount to the force so that on S

$$[\sigma_z^*] = -[(\lambda' - \lambda) \epsilon_{kk}].$$

Again, from (9),

$$\sigma_z' = \sigma_z^* + (\lambda' - \lambda) \epsilon_{kk},$$

so that

$$[\sigma_z'] = [\sigma_z^*] + [(\lambda' - \lambda) \epsilon_{kk}] = 0.$$

A second expression for the discontinuity in σ_z^* can be obtained from the third normal relation (8) written in the form

$$\sigma_z^* = (\lambda' + 2\mu) \epsilon_{kk}^* - 2\mu(\epsilon_x^* + \epsilon_y^*),$$

which since ϵ_x^* and ϵ_y^* are both continuous leads to

$$[\sigma_z^*] = [(\lambda' + 2\mu) \epsilon_{kk}^*].$$

The two discontinuities can be equated to produce

$$[(\lambda' + 2\mu) \epsilon_{kk}^*] + [(\lambda' - \lambda) \epsilon_{kk}] = 0,$$

and so if H is a function given by

$$H = (\lambda' + 2\mu) \epsilon_{kk}^* + (\lambda' - \lambda) \epsilon_{kk}$$

it is continuous in the whole space. Rearranging the third NAVIER equation (11) yields the following expression for the derivative of H along the outward normal to S :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} - \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \right\}.$$

The terms on the right side are all continuous, by the same arguments used previously, and thus $\partial H/\partial z$ contains no jump in passing from A to B . The divergence of the system of equations (11) leads to

$$\nabla^2 H = 0,$$

showing that H is harmonic in the region of the inclusion and matrix. That it is harmonic in the whole space follows from its continuity together with that of its normal derivative across S . By a well-known theorem of Potential Theory (KELLOGG [8] p. 218) H therefore vanishes and so we have

$$\epsilon_{kk}^* = - \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' + 2\mu} \right) \epsilon_{kk} \quad \dots \dots \dots (12).$$

This is an explicit expression for the difference dilatation at every point of the medium in terms of known quantities and is later used in the solution of the difference state. Due to the equality of λ' and λ , ϵ_{kk}^* vanishes in the matrix which therefore experiences no change in volume when the

unperturbed state is replaced by the perturbed one. The inclusion on the other hand, changes its volume by an amount

$$\int \varepsilon_{kk}^* dv$$

so that the total change in the volume of this region from the initial unstressed state to the final perturbed stressed state is, in view of (12),

$$\int (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^*) dv = \int \left(\frac{\lambda - 2\mu}{\lambda' - 2\mu} \right) \varepsilon_{kk} dv,$$

where the integration is through the region occupied by the inclusion. An equivalent result has been cited by ESHELBY [1] but refers only to the homogeneous media considered by him.

The discontinuity for the normal difference strain ε_z^* follows from (12) by recalling that ε_z^* and ε_y^* are continuous. Then

$$[\varepsilon_z^*] = [\varepsilon_{kk}^*] = - \left[\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' - 2\mu} \right) \varepsilon_{kk} \right].$$

We are now in a position to evaluate the discontinuities in the only other remaining difference stresses σ_x'', σ_y'' . From the stress-strain relations (7) we have

$$\sigma_x'' = \lambda' \varepsilon_{kk}^* - 2\mu \varepsilon_x^* - (\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk},$$

which on using (12) can be rewritten as

$$\sigma_x'' = 2\mu \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' - 2\mu} \right) \varepsilon_{kk} - 2\mu \varepsilon_x^*,$$

so that the discontinuity in σ_x'' is

$$[\sigma_x''] = 2\mu \left[\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' - 2\mu} \right) \varepsilon_{kk} \right].$$

The same expression holds for the discontinuity in σ_y'' .

The discontinuities in the difference components have thus all been found. Moreover since the unperturbed field is continuous these discontinuities are just those occurring in the perturbed field. This is therefore continuous everywhere except on the interface of each inclusion where the normal strain normal to the surface and the normal stresses tangential to the surface contain the discontinuities determined above.

The discontinuities can always be evaluated providing the foregoing theory is modified to include a fictitious homogeneous matrix. This is taken to be the medium of the unperturbed state which now has uniform Poisson's ratio ν . The perturbed state, as before, has a variable Poisson's ratio ν' which no longer coincides with ν outside the inclusions but assumes there the given variable value of Poisson's ratio for the matrix. Under the applied load the unperturbed stresses, strains and displacement satisfy equations (1) — (4), but with uniform ν and μ , and can thus be solved by standard methods, yielding a known value for the dilatation. With the altered meaning for ν, ν' and ε_{kk} all the remaining equations are the same so that the resulting expressions for the discontinuities are unchanged in form and can thus be evaluated.

3. Solution of equations for the difference state

We revert to an arbitrary system of rectangular cartesian axes and begin by solving equation (12) for the difference displacement. It is then a simple matter to derive the associated strains and stresses from equations (5) and (7) respectively.

We seek a solution in the form

$$\bar{u}^* = \text{grad } \varphi$$

where φ is a point-function called the difference displacement potential¹. Inserting this value of \bar{u}^* into (12), or equivalently into the NAVIER equation (11), leads to

$$(\lambda' - 2\mu) \nabla^2 \varphi - (\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk} = 0,$$

which can be integrated in the form of the gravitational potential

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho(Q)}{R(P, Q)} dv(Q) \quad \dots \dots \dots (13)$$

¹ GOODIER [2] has employed a similar method to integrate the thermoelastic equations.

due to a distribution of matter of density,

$$\varrho(Q) = \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' + 2\mu} \right) \varepsilon_{kk} \dots \dots \dots (14)$$

through the volume of the inclusions. In these formulae $R(P, Q)$ is the distance between the point P at which φ is evaluated and a point Q within the inclusions. The integration is performed over the region of the inclusions and must be defined as suitably convergent when P lies inside an inclusion. We observe that the attraction of a potential is its gradient so that the difference displacement is the attraction of φ .

For points in the matrix it is well-known from potential theory that φ becomes harmonic and then the modified form (with λ' equal to λ) of (12) is identically satisfied. The integral (13) therefore supplies a solution at all points of space. However, it must be remembered that although φ with its first derivatives is continuous everywhere, certain second derivatives of φ become discontinuous with ϱ and thus on the surface of the inclusions the corresponding stresses and strains of the difference state are undefined, as we have otherwise seen in Section 2.

If the matrix is finite the expression (13) for φ does not supply a complete solution to equation (12) and in general the stresses derived from this particular value give rise to tractions over the external surface. These tractions must be annulled by superposing another stress-distribution satisfying the field equations for the perturbed state and producing equal and opposite surface tractions. The second distribution generally has discontinuities over the interface of the inclusions similar to the difference state and its determination is just as complicated as the perturbed state. When the matrix is infinite, the form (13) leads to a complete solution provided $\varrho(Q)$ is bounded at each point. This condition is fulfilled by excluding from the region of each inclusion any point force or other type of load-singularity, such as a centre of dilatation. On this assumption, $\varphi(P)$ then behaves as $O(1/R)$ at large distances, R , from the origin so that the displacements and stresses have orders $O(1/R^2)$ and $O(1/R^3)$ respectively. But the loading vanishes at infinity for the difference displacement state and hence its uniqueness is ensured by KIRCHHOFF's theorem.

The harmonic property of φ within the matrix means that the difference displacement is also harmonic at points of this region. Further, from modified stress-strain relations (7) we deduce that in the matrix the difference stresses are given by

$$\sigma'_{ij} = \lambda \varepsilon'_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon'_{ij}$$

and therefore are likewise harmonic. From a well-known theorem in potential theory, a harmonic function attains its limits on the boundary of its region of definition. Thus both the difference displacement and stress attain local maxima on the matrix side of the interfaces of each inclusion, causing stress concentrations.

A precise account of the difference state therefore rests on a knowledge of the displacement potential φ or its gradient. This is the same as knowing the potential or attraction of a gravitational distribution of matter. Very few have so far been evaluated especially for problems consisting of multiply-connected regions of space. We therefore concentrate attention on potentials for single finite regions, and in the next section deal with the single inclusion. When the media become homogeneous the conclusions there reached reduce to a special case of ones obtained by ESHELBY [1] for the arbitrarily shaped inclusion having both moduli different to those of the matrix.

Little work has appeared in the literature on non-homogeneous bodies but mention might be made of the contribution by HEAPS [3], [4] who discusses the problem of the infinite space subjected to a given arbitrary load with both moduli varying from uniform values in such a way that second order terms can be neglected. Solutions are given when the variation occurs through the entire space and when it is restricted to finite regions (inclusions).

One final remark deserves attention. Any equilibrium distribution of stress and strain in a medium which contains zero dilatation is not disturbed by the introduction of an inclusion of different POISSON'S ratio. For instance, the field due to a centre of dilatation is unperturbed by such an inclusion if its centre is placed outside the inclusion. Similarly in an extended medium stressed at infinity along the shear directions the presence of an inclusion has no influence on the elastic field. Of course, if the inclusion consists of a differing shear modulus as well as a differing POISSON'S ratio, this remark no longer holds good.

4. The single Inclusion

This section discusses certain types of single inclusions which can be solved by using known values of potential functions. It deals with the non-homogeneous problem of the ellipsoidal inclusion and then with some selected topics for the homogeneous inclusions of various shapes.

DYSON [5] has given the potential due to matter distributed through a solid ellipsoid with density

$$\varrho(Q) = \frac{4\alpha}{abc} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

where $\alpha > 0$ and f is an arbitrary function. The coordinate axes are along the axes of the ellipsoid which are of semi-lengths a, b, c . Several problems emerge. Suppose, for instance, that the media are homogeneous; then putting $\alpha = 1$ we have that

$$\varepsilon_{kk} = \frac{4}{abc} \frac{(1-\nu')(1-2\nu)}{(\nu'-\nu)} f,$$

so that the unperturbed dilatation is proportional to an arbitrary function. In principle therefore this example can be solved for any type of boundary conditions whatsoever, but in practice these will be restricted to those which permit an evaluation of the integrals entering into the solution.

Again, suppose that the matrix is homogeneous but that Poisson's ratio in the inclusion is still variable. Let the loading consist of a uniform stress at infinity and no body-force. Then on taking

$$f = -\frac{abc}{4\alpha} \cdot \frac{\nu \varepsilon_{kk}}{(1-2\nu)}$$

the value of ν' in the inclusion is given by

$$\nu' = 1 - (1-\nu) \left/ \left\{ 1 - \nu \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right)^{\alpha-1} \right\} \right.,$$

and so varies from ν on the outer to surface to 0 at the centre. The corresponding difference displacement is given by

$$u^* = \frac{abc}{2} \cdot \frac{\nu \varepsilon_{kk}}{(1-2\nu)} \cdot x \int_{\beta}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right)^{\alpha-1}}{(a^2+u)^{3/2} (b^2+u)^{1/2} (c^2+u)^{1/2}} \cdot du,$$

where the lower limit of the integral is either 0 or the greatest root of the cubic equation

$$\frac{x^2}{a^2+\beta} + \frac{y^2}{b^2+\beta} + \frac{z^2}{c^2+\beta} = 1,$$

depending upon whether points of the inclusion or matrix are being considered. The other components of \bar{u}^* can be obtained by cyclic permutations. When $\alpha = 2$ these expressions can be evaluated in closed form by means of elliptic integrals ([6], pp. 84, 85) thus giving the displacement, stresses and strains to an apparently new problem.

The general problem of the homogeneous inclusion embedded in a homogeneous matrix stressed uniformly at infinity in the absence of body force has been solved by ESHELBY [1]. The solution is expressed in terms of the derivatives of potential and biharmonic potential functions due to uniform distributions of gravitating matter over the inclusions. There is little advantage in applying the present approach to such problems as this leads to a special case of ESHELBY's conclusions when the shear modulus is identical in the matrix and inclusion. However it is not possible to extend ESHELBY's approach to the non-homogeneous problem since his proof relies upon an explicit expression for the solution of the KELVIN point-force problem and this is available only for homogeneous media. For other inclusions within this class reference can be made to a survey by STERNBERG [7] of the literature on stress-concentration.

The homogeneous inclusion of the type considered by us possesses an interesting feature when in the shape of an ellipsoidal shell of finite thickness. Provided the matrix is homogeneous and stressed uniformly at infinity the difference displacement potential produces an attraction which vanishes inside the hollow shell (KELLOGG [8] p. 22). It immediately follows that the difference displacement also vanishes in that part of the matrix contained within the hollow. On using the stress-strain relation (7) and recalling that λ' equals λ in the matrix we see that the difference stresses also disappear in the same region so that such an inclusion builds up a stress concentration outside itself but inside the matrix remains in its unperturbed state. These observations are also applicable to the inclusion shaped in the form of a hollow eccentric sphere with the slight difference that the attraction is uniform instead of zero inside the hollow.

Other potential functions which are known and can be used in the solution of the corresponding homogeneous inclusion problem include those for regions shaped in the form of a semi-infinite circular cylinder (MYKELSTAD [9]); a toroid (MORSE and FESHBACH [10] p. 1301); and the rectangular parallelepiped (MACMILLAN [11] p. 22).

5. Incompressible media

When POISSON's ratio becomes $1/2$ in either the matrix or inclusion, the formulation of the previous sections breaks down due to the presence of the infinite factor $(1 - 2\nu)^{-1}$. In this section a modified proof is given which is valid for all values of ν and ν' including $1/2$ and shows that with minor alterations the earlier results continue to hold. The method avoids a description in terms of body- and surface layer-force, as this requires a separate discussion for either ν or ν' equal to $1/2$, and instead deals with both cases at once. It was not used earlier as it employs an uncommon form of the stress-strain relations and tends to obscure certain principles more easily revealed by the former approach.

The same notation is used as before and the continuity of the difference tractions and displacement across the interfaces still implies the continuity of σ_x , σ_{xx} , σ_{yz} and all the tangential first derivatives of \bar{u}^* .

If σ_{kk} is the sum of the normal stresses, the stress-strain relations (7) can be written in the form

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu'}{1 + \nu'} \sigma_{kk}'' \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^* + \frac{\nu' - \nu}{(1 + \nu')(1 + \nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \dots \quad (15),$$

which holds for all values of ν and ν' including $1/2$. Substitution of these stresses into the equilibrium equations (6), which are unaffected by the value of POISSON's ratio, leads to the following equation for the difference displacement,

$$2\mu \nabla^2 \bar{u}^* + \text{grad} \left\{ \frac{\sigma_{kk}''}{(1 + \nu')} - \frac{\nu' - \nu}{(1 + \nu')(1 + \nu)} \sigma_{kk} \right\} = 0.$$

On writing

$$h = \left(\frac{1 - \nu'}{1 + \nu'} \right) \sigma_{kk}'' - \frac{2(\nu' - \nu)}{(1 + \nu')(1 + \nu)} \sigma_{kk},$$

and treating this equation in the same way as that for H in Section 2, we arrive at the fact that h vanishes in the entire space. Hence

$$\sigma_{kk}'' = \frac{2(\nu' - \nu)}{(1 - \nu')(1 + \nu)} \sigma_{kk} \quad \dots \quad (16),$$

so that using (15) the expression for the difference dilatation becomes

$$2\mu \varepsilon_{kk}^* = - \frac{(\nu' - \nu)}{(1 - \nu')(1 + \nu)} \sigma_{kk} \quad \dots \quad (17).$$

We can now calculate the various changes in volume of the matrix or regions occupied by the inclusions due to the formation of the inclusions in the stressed medium. As before the matrix experiences no volume-change while for the inclusion the change is

$$- \int \varepsilon_{kk} dv,$$

for an incompressible inclusion or

$$\int \frac{1}{6\mu} \left(\frac{1 - 2\nu'}{1 - \nu'} \right) \sigma_{kk} dv,$$

for an incompressible matrix.

For the discontinuities we have, for instance, from (15) that

$$\sigma_x'' = \frac{\nu'}{1 + \nu'} \sigma_{kk}'' + 2\mu \varepsilon_x^* + \frac{\nu' - \nu}{(1 + \nu')(1 + \nu)} \sigma_{kk},$$

so that with the help of (16) the jump in σ_x'' is

$$[\sigma_x] = \left[\frac{\nu' - \nu}{(1 - \nu')(1 + \nu)} \sigma_{kk} \right],$$

with the same expression for $[\sigma_y]$. The jump in ε_x^* can easily be calculated from that in ε_{kk}^* , using (17).

Inspection of these modified results reveal that they are equivalent to replacing ε_{kk} by $\sigma_{kk}/(3\lambda + 2\mu)$ in the corresponding expressions of Section 3, and then proceeding to the limit with ν or ν' equal to $1/2$. Since in this limit the stress-strain relations (7) are no longer valid, this substitution requires the justification presented here.

It is well-known that the equations for an incompressible elastic body are identical to those for a quasi-static viscous fluid if displacement and shear modulus in one are replaced by velocity and coefficient of viscosity in the other. Hence by means of this analogy we can apply the results of the present section to the problem of the flow of such a fluid perturbed by a non-homogeneous solid elastic inclusion, whose shear modulus is equal to the coefficient of viscosity.

6. Inclusion forced into a similarly shaped cavity

Define a new set of strains ε''_{ij} associated with the stresses σ''_{ij} according to HOOKE's Law for the perturbed state. Thus,

$$\sigma''_{ij} = \lambda' \varepsilon''_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon''_{ij} \quad \dots \quad (18),$$

where the assumption is still made that λ' equals λ in the matrix. The difference stress is therefore completely accounted for by the strains ε''_{ij} and hence a part of the difference strain ε^*_{ij} can produce no stress at all. Following ROBINSON [12] and ESHELBY [1] we call this part a „stress-free“ strain and denote it by ε^0_{ij} . Evidently

$$\varepsilon^0_{ij} = \varepsilon^*_{ij} - \varepsilon''_{ij},$$

and inserting (18) into the stress-strain relation (7), yields the following value for ε^0_{ij} :

$$\varepsilon^0_{ij} = - \left(\frac{\lambda' - \lambda}{3\lambda' + 2\mu} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \dots \quad (19).$$

In the region of the matrix ε^0_{ij} vanishes and thus the difference stress is produced entirely by the difference strain. In the inclusions, however, ε^0_{ij} does not vanish and corresponds to a pure expansion without distortion.

The stress-free strain can be interpreted in the following manner. Consider the unperturbed body and imagine removed from it an element loaded to reproduce the strains it has when part of the body. When Poisson's ratio alters its value a further strain ε^0_{ij} occurs in the element but the stress remains constant. If now the element is treated as part of the body this further strain is not allowed to proceed freely and the resistance of the surrounding material induces another strain ε''_{ij} , which gives rise to the stress σ''_{ij} according to the relation (18).

Suppose now that the whole inclusion is separated from the unstressed matrix and is subjected to the strainpattern (19). Generally this produces a stress-distribution but when the strains ε^0_{ij} are uniform the inclusion simply expands by a uniform amount without the formation of any stress. To fit the expanded inclusion into the matrix requires the application of forces to annul the strains. Once the inclusion is fitted these forces can be removed causing both the inclusion and matrix to experience an additional strain ε''_{ij} which in turn induces the stress σ''_{ij} . These observations now allow the difference state to be used in another manner.

Consider a homogeneous inclusion of Poisson's ratio ν' and shear modulus μ that is to be forced into a similarly shaped cavity contained in an unstressed homogeneous matrix of Poisson's ratio ν and the same shear modulus. The amount of displacement which must be given to each point of the surface of the inclusion to ensure that it just fits is

$$\bar{u} = \left(\frac{\lambda' - \lambda}{3\lambda' + 2\mu} \right) \varepsilon_{kk} \bar{r},$$

where \bar{r} is the position-vector of the point. Then the elastic field arising in the medium when the inclusion is fitted is the same as the difference state for the matrix perturbed by an inclusion of the same shape as the cavity and having a Poisson's ratio ν' and shear modulus μ , provided that in the unperturbed state the applied load produces a uniform dilatation ε_{kk} .

We illustrate the procedure by means of the ellipsoidal inclusion. Suppose the amount of displacement required by every point of the interface to make the inclusion just fit into the cavity is $k\bar{r}$ where k is a constant. Then from the difference state previously derived we see that the displacement induced is

$$\bar{u}^* = \left(\frac{3\lambda' + 2\mu}{\lambda' + 2\mu} \right) k \text{grad } \varphi,$$

where φ is the potential due to a solid ellipsoid of unit density. The stresses are derived from the stress-strain relations,

$$\begin{aligned} \sigma''_{ij} &= \lambda' \varepsilon^*_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon^*_{ij} + (3\lambda' + 2\mu) k \delta_{ij}, & \text{in the inclusion} \\ \sigma''_{ij} &= 2\mu \varepsilon^*_{ij} & \text{in the matrix.} \end{aligned}$$

From the form of φ ([8], p. 192) it may easily be shown that in the inclusion the normal stress components are uniform, while the shear components vanish. The problem of the ellipsoidal inclusion having the same Poisson's ratio as the matrix can be deduced by letting ν' equal ν in the above formulae.

Stress-free strains form the basis of the study by ESHELBY [1], [13] who considers the elastic field produced when a finite region of space is subjected to an arbitrary homogeneous distribution of these strains (both shear and normal components non-zero). The field for an inclusion perturbing a stressed matrix of different moduli is derived by determining the values of the stress-free strains such that the inclusion can be replaced by a region of the same moduli as the matrix. In a sense, therefore, the formulation of the problem is the reverse of the one adopted here which calculates the field associated with the region of stress-free strain from that associated with the inclusion.

7. The ellipsoidal cavity

Following a suggestion of ESHELBY [1] we can deduce from the results of Section 6 the solution for the homogeneous matrix containing an ellipsoidal cavity. We have seen that the normal stresses induced in the ellipsoidal inclusion forced into a cavity are uniform and so when its Poisson's ratio is the same as in the matrix subtraction of these stresses from the space leaves the inclusion stress-free. In particular the surface of the inclusion is tractionless and the inclusion can therefore be removed. We are then left with the stresses for an ellipsoidal cavity in an infinite homogeneous medium stressed uniformly at infinity along directions parallel to the axes of the cavity. The same problem has been treated by STERNBERG and SADOWSKY [14] using an entirely different approach involving ellipsoidal co-ordinates.

8. Relation with thermoelasticity

The structure of the field equations for the difference state immediately suggests a relation with thermoelasticity. For if in the stress-strain relations (7) we put

$$(\lambda' - \lambda) \varepsilon_{kk} = - (3\lambda' + 2\mu) \alpha T,$$

where T is the temperature and α the coefficient of linear expansion we recover equations for the elastic field caused by an inclusion heated to a temperature T and bonded to a cold matrix of different POISSON'S ratio but the same uniform shear modulus²⁾. The difference stresses, strains and displacement become the corresponding components of the thermal problem.

The heated inclusion has frequently been studied in the literature but as far as the author is aware the connection with the inclusion problem has not been noticed. It supplies a means of combining these two parts of elasticity theory and provides another instance of the interdependence of various branches of the subject. The relationship is not restricted to a treatment of inclusions and can be extended to include the general theories of thermal and isothermal elasticity. Accounts of the extension are given by KNOPS [15] and in somewhat less detail by STERNBERG and MUKI [16].

References

- [1] J. D. ESHELBY, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. (Ser. A.)* **241** (1957), p. 376—396.
- [2] J. N. GOODIER, On the integration of the thermoelastic equations, *Phil. Mag.* **23** (1937), 1017—1032.
- [3] H. S. HEAPS, Distribution of stress in an infinite inhomogeneous elastic medium, *Proc. Second Midwestn. Conf. Sol. Mechs. Purdue Univ.* (1955), p. 14—24.
- [4] H. S. HEAPS, Effect of elastic intrusions on gravitational stress, *Trans. Amer. Geo. Union* **37** (1956), p. 477—482.
- [5] F. W. DYSON, The potentials of ellipsoids of variable densities, *Q. J. Maths.* **25** (1891), p. 259—288.
- [6] P. F. BRYD and M. D. FRIEDMAN, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Berlin 1954, Springer-Verlag.
- [7] E. STERNBERG, Three-dimensional stress concentrations in the theory of elasticity, *Appl. Mech. Rev.* **11** (1958), p. 1—4.
- [8] O. D. KELLOG, *Foundations of Potential Theory*, Dover 1953.
- [9] N. O. MYKELSTAD, Two problems of thermal stress in the infinite solid, *J. Appl. Mech.* **9** (1942), p. 136.
- [10] P. M. MORSE and N. FESHBACH, *Methods of theoretical Physics II*, 1953, McGraw-Hill.
- [11] W. D. MACMILLAN, *Theory of the Potential*, Dover 1958.
- [12] K. ROBINSON, The elastic energy of an ellipsoidal inclusion in an infinite solid, *J. Appl. Phys.* **22** (1951), p. 1045—1054.
- [13] J. D. ESHELBY, The elastic field outside an ellipsoidal inclusion, *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* **252** (1959), p. 561 to 569.
- [14] E. STERNBERG and M. A. SADOWSKY, Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity, *J. Appl. Mech.* **16** (1949), p. 149—157.
- [15] R. J. KNOPS, A method for solving linear thermoelastic problems, *J. Mech. Phys. Solids* **7** (1959), p. 182 to 192.
- [16] E. STERNBERG and R. MUKI, Note on the expansion in powers of Poisson's ratio of solutions in elastostatics, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **3** (1959), p. 229—234.

Manuskripteingang: 5. 9. 1959

Anschrift: R. J. KNOPS, Department of Mathematics, University of Nottingham, England

²⁾ GOODIER [2] has formulated equations for the general thermal problem.

Über den beginnenden plastischen Zustand bei unter innerem Überdruck stehenden Rohren

Von LADISLAUS NÉMETI

Es wird eine neue Bedingung für zulässige Beanspruchungen der über die Elastizitätsgrenze beanspruchten Bauteile vorgeschlagen. Und zwar soll die größte auftretende bleibende Verformung die Belastungsgrenze bestimmen. Als Anwendung wird das unter innerem Überdruck stehende Rohr untersucht und der Begriff einer praktisch brauchbaren ideellen Spannung eingeführt.

For structural members loaded beyond the elastic limit a new condition for determining the admissible load is suggested: the limiting load is to be determined by the maximum permanent deformation. The condition is applied to a tube subjected to internal overpressure, and for practical use the conception of equivalent stress is introduced.

Предлагается новое условие для допустимой нагрузки деталей, подвергаемых нагрузке, превышающей пределы эластичности, а именно, предполагается, что пределы нагрузки должны определяться наибольшей остаточной деформацией. В качестве приложения исследуется трубопровод, подвергаемый извне избыточному давлению, и вводится понятие практического идеального напряжения.

1. Einleitung

In der Literatur über den plastischen Zustand fester Körper sind die Spannungen und Verformungen in den verschiedensten Belastungsfällen berechnet worden, wir finden hingegen verhältnismäßig wenig Betrachtungen über die sogenannten zulässigen Belastungen, über die Belastungen also, welche die Grenze der praktischen Brauchbarkeit derjenigen Bauteile anzeigen sollen, welche über die Elastizitätsgrenze hinaus beansprucht werden. Hierbei ist natürlich der Begriff „praktische Brauchbarkeit“ ein relativer und hängt in erster Linie vom Verwendungszweck des betreffenden Werkstückes ab, aber auch von der Art der Belastung.

Es ist aber klar, daß für die ausführende Praxis in erster Linie gerade diese zulässigen Belastungen wichtig sind, und daß von diesem Gesichtspunkte aus die Verteilung der Spannungen und Verformungen eher mittelbar interessiert.

Am häufigsten wird wohl als Belastungsgrenze die sog. Tragfähigkeit des Bauteils angesehen, derjenige Belastungsfall also, welcher zur vollständigen Zerstörung des Körpers führt. Das wird z. B. der Fall sein, wenn der plastische Zustand instabil wird. Für den stabförmigen Körper und eine konstante Fließspannung kann diese Grenze erreicht sein, wenn ein Querschnitt vollständig plastisch wird — um uns kurz auszudrücken.

In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle sind aber die großen Verformungen, welche hierbei auftreten, bedeutend größer, als es der Verwendungszweck des Bauteils erlaubt, mit anderen Worten, die Tragfähigkeit des Körpers liegt oft wesentlich höher als die durch die auftretenden bleibenden Verformungen bedingte Grenze.

Wenn man also die zulässigen größten bleibenden Verformungen festlegt, erhält man eine neue Definition der zulässigen Beanspruchung, welche in den meisten Fällen brauchbarer und wichtiger sein dürfte als die der Tragfähigkeit des Bauteils.

Die obenerwähnten zulässigen bleibenden Verformungen sind im allgemeinen klein gegenüber den Abmessungen des Körpers, sind von derselben Größenordnung wie die auftretenden elastischen Verformungen oder sogar auch klein gegenüber der letzteren.

Setzt man also die bleibenden Verformungen als klein gegenüber den elastischen voraus, so kann man vermuten, daß durch eine Art „Linearisierung“ sich die Rechnungsergebnisse wesentlich vereinfachen lassen, daß man also für den beginnenden Fließzustand praktisch brauchbare Näherungsformeln wird erhalten können.

Obige Überlegungen stellen eigentlich ein Programm dar. Dieses besteht darin, daß für die verschiedenen Belastungsfälle die größte bleibende Verformung ermittelt werden soll, weiter sollen für den Fall des beginnenden plastischen Zustandes brauchbare Näherungsformeln aufgestellt werden.

In vorliegender Arbeit soll als Anwendung das unter innerem Überdruck stehende Rohr nach diesen Gesichtspunkten untersucht werden.

2. Der elastische Zustand

Die diesbezüglichen Ergebnisse sind bekannt. Wir legen die Achse des zylindrischen Koordinatensystems (r, φ, z) in die Längsachse des Rohres. Das Rohr stehe unter dem inneren Über-

druck p , andere äußeren Kräfte greifen nicht an, mit Ausnahme der Enden. Die Abstützung an den Enden sei so, daß keine Biegungs- oder Torsionsmomente auftreten. In hinreichender Entfernung von den Enden herrscht dann ein ebener Verformungszustand mit einer konstanten Dehnung

$$\varepsilon_z = k \quad \dots \quad (2.1).$$

Es bezeichne noch r_i den inneren, r_a den äußeren Halbmesser, $\xi = \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2$, u die radiale Verschiebung. Es gilt dann:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{\xi - 1} \left[1 - \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{p}{\xi} \left[1 + \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{p}{\xi - 1} + E k \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2.2),$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} &= \frac{p}{2G(\xi - 1)} \left[1 - 2\mu - \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right] - \mu k, \\ \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} &= \frac{p}{2G(\xi - 1)} \left[1 - 2\mu + \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right] - \mu k \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2.3).$$

Wird der durch den Innendruck entstehende Achsialzug vom Rohr selber aufgenommen, so ist

$$E k = (1 - 2\mu) \frac{p}{\xi - 1} \quad \dots \quad (2.4).$$

Entfällt die Bedingung, welche σ_r an der Innenbegrenzung festlegt, so gilt statt (2.2) und (2.3):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C \left[1 - \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_\varphi &= C \left[1 + \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_z &= 2\mu C + E k \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2.5),$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} &= \frac{C}{2G} \left[1 - 2\mu - \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right] - \mu k, \\ \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} &= \frac{C}{2G} \left[1 - 2\mu + \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 \right] - \mu k \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2.6).$$

Diese Form werden wir später benötigen.

3. Der plastische Zustand

Als Plastizitätsbedingung wollen wir die TRESCASche Fließbedingung verwenden. Diese zeitigt im allgemeinen Ergebnisse, die nicht sehr von denen der v. MISESSchen Fließbedingung abweichen. In unserem Fall dürften die Abweichungen besonders klein sein. Dafür ergeben sich wesentliche mathematische Vereinfachungen in der Behandlung des Problems.

Wir wollen also annehmen, daß im plastischen Gebiet gilt

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_F \quad \dots \quad (3.1),$$

wobei σ_F die Fließgrenze des Zugversuches darstellt.

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r = \sigma_\varphi$$

ergibt sich dann sofort — berücksichtigt man die Grenzbedingung für $r = r_i$ —

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_F \ln \frac{r}{r_i} - p, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_F \left(\ln \frac{r}{r_i} + 1 \right) - p \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3.2).$$

Weiter verwenden wir die von HENCKY zuerst angegebenen [1] Gleichungen, in der Schreibweise von SOKOŁOWSKI [2]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r - \varepsilon_m &= \frac{\psi}{2G} (\sigma_r - \sigma_m), \\ \varepsilon_\varphi - \varepsilon_m &= \frac{\psi}{2G} (\sigma_\varphi - \sigma_m), \\ \varepsilon_z - \varepsilon_m &= \frac{\psi}{2G} (\sigma_z - \sigma_m), \\ \varepsilon_m &= \frac{1-2\mu}{E} \sigma_m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.3).$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} 3 \varepsilon_m &= \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z, \\ 3 \sigma_m &= \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z, \end{aligned}$$

und ψ ist ein Proportionalitätsfaktor, welcher das Verhältnis: (Gesamtformänderung)/(elastische Formänderung) ausdrückt. Diese Ortsfunktion ist im elastischen Fall = 1, im plastischen Fall > 1 . Wir bemerken noch, daß die ersten drei Gleichungen (3.3) linear abhängig sind.

Mit Hilfe von (3.2) schreiben wir die Gleichungen (3.3) um:

$$\left. \begin{aligned} 2 u' - \frac{u}{r} - k &= \frac{\psi}{2G} \left[\sigma_F \left(\ln \frac{r}{r_i} - 1 \right) - p - \sigma_z \right], \\ -u' + 2 \frac{u}{r} - k &= \frac{\psi}{2G} \left[\sigma_F \left(\ln \frac{r}{r_i} + 2 \right) - p - \sigma_z \right], \\ u' + \frac{u}{r} + k &= \frac{1-2\mu}{E} \left[2 \sigma_F \left(\ln \frac{r}{r_i} + \frac{1}{2} \right) - 2p + \sigma_z \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.4).$$

Hieraus erhalten wir, durch Eliminieren von ψ und σ_z :

$$\left(\frac{du}{dr} \right)^2 - \left(\frac{u}{r} \right)^2 - 2N y \frac{du}{dr} + N(2y-1) \frac{u}{r} + kN = 0 \quad \dots \dots \dots (3.5),$$

wobei wir folgende dimensionslose Größen eingeführt haben:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{4} \left[\ln \left(\frac{r}{r_i} \right)^2 - \Pi \right] + 1 - \frac{k}{2N}, \\ N &= (1-2\mu) \frac{\sigma_F}{E}, \\ \Pi &= \frac{2p}{\sigma_F} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.6).$$

Die beiden anderen Unbekannten drücken sich mit Hilfe von u aus:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{2G}{\sigma_F} \left(\frac{u}{r} - \frac{du}{dr} \right), \\ \sigma_z &= \sigma_F \left(\ln \frac{r}{r_i} - 1 - \frac{2 \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} - k}{\frac{u}{r} - \frac{du}{dr}} - \frac{\Pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.7).$$

Zur Integrierung der Gleichung (3.5) führen wir als abhängige Veränderliche

$$x = \frac{u}{Nr}$$

und als unabhängige Veränderliche $y = y(r)$ ein. Dann erhalten wir

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - \frac{4}{3}(y-x)\frac{dx}{dy} - \frac{4}{9}\left(x - \frac{k}{N}\right) = 0 \quad \dots \quad (3.8),$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -\frac{3}{2} \frac{1-2\mu}{1+\mu} \frac{dx}{dy}, \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_F}{3} \left[2y + 1 + 2 \frac{x - \frac{k}{N}}{\frac{dx}{dy}} + \frac{k}{N} \right] \end{aligned} \right\} \dots \quad (3.9).$$

Indem wir (3.8) nach y auflösen und die Substitution

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}(t^4 - 1)$$

verwenden, erhalten wir

$$y = \frac{t^4 + 3}{4} x - \frac{1}{t^4 - 1} - \frac{t^4 - 1}{4} \frac{k}{N} \quad \dots \quad (3.10).$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach t , welches wir als neue unabhängige Veränderliche ansehen, und erhalten:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t} \left(x - \frac{k}{N} \right) + \frac{4}{t(t^4 - 1)^2} = 0 \quad \dots \quad (3.11).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$x = \frac{1}{t} \left[A + \frac{t}{t^4 - 1} - \frac{3}{2} \arctg t - \frac{3}{4} \ln \frac{t+1}{t-1} \right] + \frac{k}{N} \quad \dots \quad (3.12).$$

Diese Beziehung, zusammen mit (3.10) gibt eine parametrische Darstellung der Funktion $u(r)$.

Wir haben außerdem durch Umformung von (3.9)

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 2 \frac{1-2\mu}{1+\mu} \frac{1}{t^4 - 1}, \\ \frac{\sigma_z}{\sigma_F} &= 2x - \frac{4}{3}y - \frac{2}{t^4 - 1} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{k}{N} \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (3.13).$$

Damit sind auch diese Größen durch den Parameter t ausgedrückt.

4. Der elastisch-plastische Zustand

Wenn, bei wachsendem Innendruck, irgendwo die Bedingung (3.1) erreicht wird, so tritt dort der plastische Zustand auf. Bei den durch die Gleichungen (2.2) bedingten Spannungen im elastischen Zustand wird der plastische Zustand zuerst am Innenrand erreicht. Von dort breitet sich der ringförmige plastische Bereich bei wachsendem p nach außen aus.

Um diesen elastisch-plastischen Zustand zu charakterisieren, müssen wir den die beiden Gebiete trennenden Grenzkreis näher ins Auge fassen.

Wir bezeichnen den Wert der vorkommenden Veränderlichen auf dem Grenzkreis mit dem Index 0, also z. B.: $r_0, x_0, y_0, t_0, \psi_0$, außerdem sei $(r_0/r_a)^2 = \eta \leq 1$; die Spannungen und Verschiebungen im plastischen Bereich seien mit dem oberen Index P und diejenigen im elastischen Bereich mit dem oberen Index E versehen, also z. B.: σ_r^E, σ_r^P usw.

Am Anschluß der beiden Gebiete, also am Grenzkreis, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein ($r = r_0$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\psi^E - \sigma_r^E &= \sigma_F, \\ \sigma_r^E &= \sigma_r^P, \\ u^E &= u^P, \\ k^E &= k^P = k, \\ \psi &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.1).$$

Hierbei sind für σ^E die Formeln (2.5) zu verwenden. Außerdem gilt, wenn wir annehmen, daß der Achsialzug vom Rohr selbst aufgenommen wird,

$$\int_{r_i}^{r_o} \sigma_z^P r \, dr + \int_{r_o}^{r_a} \sigma_z^E r \, dr = \frac{P}{2} r_i^2 \dots \dots \dots (4.2).$$

Diese sechs Gleichungen dienen zur Bestimmung der sechs Unbekannten: C, k^E, A, k^P, t_0, r_0 .

Aus den ersten beiden Gleichungen (4.1) erhalten wir

$$1 - \eta + \ln \xi \, \eta = II \dots \dots \dots (4.3),$$

$$C = \frac{\sigma_F}{2} \eta \dots \dots \dots (4.4).$$

Aus der letzten:

$$t_0^4 = 3 \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \dots \dots \dots (4.5).$$

Aus (2.6) folgt zunächst für $r = r_0$

$$x_0 = \frac{1 + \mu}{2} \left(\frac{1}{1 - 2\mu} + \eta \right) - \mu \frac{k}{N}.$$

Indem wir diese mit der Beziehung (3.12) für $r = r_0$ gleichsetzen, erhalten wir

$$A = t_0 \frac{1 + \mu}{2} \left(\eta - 2 \frac{k}{N} \right) + \frac{3}{2} \arctan t_0 + \frac{3}{4} \ln \frac{t_0 + 1}{t_0 - 1} \dots \dots \dots (4.6).$$

Mit diesem Wert erhalten wir endlich

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{t} \left[\frac{1 + \mu}{2} t_0 \left(\eta - 2 \frac{k}{N} \right) + \frac{t}{t^4 - 1} + \frac{3}{2} (\arctan t_0 - \arctan t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \left(\ln \frac{t_0 + 1}{t_0 - 1} - \ln \frac{t + 1}{t - 1} \right) \right] + \frac{k}{N}, \\ y &= \frac{t^4 + 3}{4t} \left[\frac{1 + \mu}{2} t_0 \left(\eta - 2 \frac{k}{N} \right) + \frac{3}{2} (\arctan t_0 - \arctan t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \left(\ln \frac{t_0 + 1}{t_0 - 1} - \ln \frac{t + 1}{t - 1} \right) \right] + \frac{1}{4} + \frac{k}{N} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.7).$$

Diese Beziehung, zusammen mit (4.3) und (4.5), stellt diejenige Lösung der Gleichung (3.5) bzw. (3.11) dar, welche die Anschlußbedingungen an das elastische Gebiet befriedigt. Hier ist allerdings noch der Wert von k unbekannt, dessen Berechnung aus (4.2) aber unerwartet große rechnerische Komplikationen bereitet. Wir werden weiter unten sehen, wie wir diese Schwierigkeit — bei unserer im Punkt 1. formulierten Zielsetzung — umgehen können.

Aus (4.3) ergibt sich übrigens folgende Disjunktion der Belastungsfälle:

$$\left. \begin{aligned} \text{Rein elastischer Zustand:} & \quad 0 < II \leq 1 - \frac{1}{\xi}, \\ \text{elastisch-plastischer Zustand:} & \quad 1 - \frac{1}{\xi} < II < \ln \xi, \\ \text{rein plastischer Zustand:} & \quad II = \ln \xi, \\ \text{(in indifferentem Gleichgewicht)} & \\ \text{rein plastischer Zustand:} & \quad II > \ln \xi \\ \text{(kein Gleichgewichtszustand)} & \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.8).$$

Außerdem können wir noch feststellen, daß für $r = r_0$

$$\sigma_z^P = \sigma_z^E \dots \dots \dots (4.9)$$

ist.

5. Der beginnende Fließzustand

Gemäß unserer Überlegungen in 1., betrachten wir für die Zulässigkeit der Belastung die Größe ψ_i bei $r = r_i$, d. h. ψ als maßgebend.

Für diese suchen wir einen Näherungsausdruck für den Fall des beginnenden Fließzustandes. In diesem Fall ist r_0 nahe bei r_i , Π nahe bei $1 - \frac{1}{\xi}$, t_0 nahe bei t_i usw.

Die Größen, welche dem Grenzbelastungsfall $\Pi = 1 - \frac{1}{\xi}$ entsprechen, wollen wir mit einem Stern bezeichnen, z. B.: ψ^* , t^* , η^* usw.

Es ist:

$$\left. \begin{aligned} \Pi^* &= 1 - \frac{1}{\xi}, \\ \eta^* &= \frac{1}{\xi}, \\ t_i^* &= t_0, \\ \psi_i^* &= 1, \\ k^* &= \frac{1 - 2\mu}{E} \frac{p^*}{\xi - 1} \quad (\text{aus 2.4}) \\ &= \frac{N}{2} \frac{\Pi^*}{\xi - 1} = \frac{N}{2\xi}, \\ y_i^* &= -\frac{3}{4}\Pi^* + 1 - \frac{k^*}{2N} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\xi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.1).$$

Bei beginnendem Fließzustand können wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \frac{\xi - 1}{\xi} + \Delta\Pi, \\ \eta &= \frac{1}{\xi} + \Delta\eta, \\ t_i &= t_0 - \Delta t, \\ \psi_i &= 1 + \Delta\psi, \\ k &= \frac{N}{2\xi} + \Delta k, \\ y_i &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\xi} + \Delta y. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.2).$$

Als Maß für die Abweichung vom Grenzbelastungsfall ($\Pi = \Pi^*$) setzen wir die Größe

$$\Pi - \frac{\xi - 1}{\xi} \Pi^* - 1 \dots \dots \dots (5.3),$$

welche für $\Pi = \Pi^*$ verschwindet.

Dann erhalten wir aus (5.3)

$$\Delta\Pi = \frac{\xi - 1}{\xi} \Delta \dots \dots \dots (5.4),$$

aus (4.3)

$$\Delta\eta = \frac{\Delta}{\xi} \dots \dots \dots (5.5),$$

wenn wir die Größen, welche von höherer Ordnung als 1 klein sind, vernachlässigen.

Aus der Definitionsformel für y (3.6) erhalten wir

$$\Delta y = -\frac{3}{4} \frac{\xi - 1}{\xi} \Delta - \frac{\Delta k}{N}.$$

Andrerseits wird aus (4.7) bei Vernachlässigung der von höherer Ordnung kleinen Größen

$$\Delta y = -\frac{9}{4} \frac{1}{1-2\mu} \frac{\Delta t}{t_0} + \frac{3}{4} \Delta \eta - \frac{\Delta k}{N}.$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke erhalten wir

$$\frac{\Delta t}{t_0} = \frac{1-2\mu}{3} \Delta \quad \dots \dots \dots (5.6).$$

Wie ersichtlich, ist diese Beziehung unabhängig von Δk . Aus (3.13) folgt

$$\Delta \psi = 6 \frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{\Delta t}{t_0} = 2(1-\mu) \Delta \quad \dots \dots \dots (5.7).$$

Indem wir die Definitionsformel (5.3) und (3.6) benützen, erhalten wir aus (5.7)

$$2p \frac{\xi}{\xi-1} = \sigma_F \left[1 + \frac{\Delta \psi}{2(1-\mu)} \right] \quad \dots \dots \dots (5.8).$$

Führen wir die ideelle Spannung

$$\sigma_i = \sigma_F \left[1 + \frac{\Delta \psi}{2(1-\mu)} \right] \quad \dots \dots \dots (5.9)$$

ein, so wird aus (5.8)

$$\sigma_i = 2p \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad \dots \dots \dots (5.10).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber derselbe Ausdruck, den man auf Grund der klassischen Theorie erhält, wenn man die größte Schubspannung als maßgebend für die Bruchgefahr ansieht. Unser Endergebnis (5.10) besagt also:

Schreibt man eine höchstzulässige bleibende Formänderung (ψ) vor, so kann man nach der klassischen Theorie rechnen; nur wird man eine ideelle Spannung verwenden, welche gegenüber der klassischen zulässigen Spannung um einen gewissen Betrag erhöht ist. Diese Erhöhung ist — das ist das Wesentliche — unabhängig von den Abmessungen und von der Belastung des Rohres. Für die Anwendung in der Praxis sind hierbei zwei Wege offen.

Erstens: auf Grund des vorliegenden Verwendungszweckes für den betreffenden Bauteil wird man ψ bzw. $\Delta \psi$ vorschreiben, und die übliche zulässige Spannung um den entsprechenden Betrag gemäß (5.9) erhöhen.

Zweitens: man rechnet bewährte Ausführungen — welche denselben Verwendungszweck haben — auf Grund der Gleichung (5.10) nach. Die auf diese Weise erhaltene Spannung ist dann für dasselbe Material auch für andere Ausführungen zulässig.

Zum Schluß noch einige Worte über den Gültigkeitsbereich unserer Ergebnisse. In Wirklichkeit sind die Baustoffe nicht ideal-plastisch, noch wird im normalen Beanspruchungsfall die Streckgrenze erreicht, auch wenn die Proportionalitätsgrenze oder auch die Elastizitätsgrenze überschritten wird. Es könnte also scheinen, daß man an Stelle der Bedingung (3.1) besser eine verallgemeinerte v. MISESSche Fließbedingung [3] verwendet hätte. Gleichung (5.10) gilt aber im elastischen Bereich, wobei σ_i als größter Unterschied der Normalspannungen auftritt. Sie gilt aber auch im beginnenden Fließzustand, wobei σ_i die durch (5.9) definierte ideelle Spannung ist. Wir interpolieren nun zwischen beiden Gebieten — das ist gerade der praktisch vorkommende Bereich — und können sagen, daß wir (5.10) wohl auch in diesem Fall als angenähert richtig betrachten können.

Literatur

- [1] H. НЕНЦKY, Zur Theorie plastischer Deformationen usw. ZAMM 4 (1924), S. 323—324.
- [2] В. В. Соколовский, Теория пластичности. Гостехтеориздат, 1950.
- [3] А. А. Ильюшин, Пластичность. Гостехиздат, 1948.
- [4] W. PRAGER, The theory of plasticity. Proc. Inst. Mech. Eng. 169 (1955), nr. 21.

Manuskripteingang: 27. 11. 1959

Anschrift: Dipl.-Ing. LADISLAUS NÉMETI, Academia Republicii Populare Romîne, Institutul de Calcul, Cluj, Str. Republicii nr. 37—39 (Rumänien)

Einseitig eingespannter Plattenstreifen mit Einzellast

„Alte Wege — neue Wege“

Von C. WEBER

Ein unendlich langer Plattenstreifen sei an der einen Längsseite eingespannt, während die andere Längsseite ein freier Rand ist. In einem Punkte zwischen beiden Längsseiten ist der Plattenstreifen durch die Kraft P belastet. Es wird eine Lösung abgeleitet, die durch Potentialfunktionen mit singulären Stellen ausgedrückt ist.

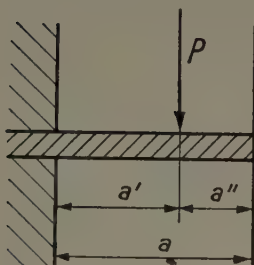
A strip of plate infinitely long is clamped at one of its long sides while the other side is free. The strip is acted upon by a force P acting at a point somewhere between the two long sides. A solution is deduced which is expressed by potential functions with singularities.

Рассматривается прямоугольная пластинка бесконечной длины, одна из продольных сторон которой закреплена, а другая представляет собой свободный край. К некоторой точке пластинки, лежащей между обеими продольными сторонами, прикладывается сила P . Выводится решение при помощи потенциальных функций, обладающих особыми точками.

1. Problemstellung

Der Plattenstreifen nach Bild 1 ist an der linken Längsseite eingespannt, die rechte Längsseite ist frei. Die Plattenbreite ist a , der Kraftangriffspunkt O befindet sich im Abstände a' vom eingespannten Rande und im Abstände $a - a' = a''$ vom freien Rande. Wir wählen das Koordinatensystem x, y mit dem Anfangspunkt O ; weiter die Systeme $x' = x + a'$, $y' = y$ und $x'' = x - a''$, $y'' = y$ mit den Anfangspunkten auf den Längsseiten.

Wir nehmen für die Durchbiegung w der Platte die Grundlösung



mit

$$w_0 = c r^2 \ln \frac{r}{a} = c \operatorname{Re} \left[\bar{z} z \ln \frac{z}{a} \right]$$

und

$$c = \frac{P}{8\pi D}; \quad D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Dazu kommen weitere Glieder zur Befriedigung der Randbedingungen.

Die Grundlösung formen wir für den linken Rand um:

$$\begin{aligned} w_0 &= c \operatorname{Re} [(x - i y) z \ln (z/a)] \\ &= c \operatorname{Re} [(-z + 2x) z \ln (z/a)] \\ &= c \operatorname{Re} [-z^2 \ln (z/a) + 2x z \ln (z/a)] \\ &= c \operatorname{Re} [-z^2 \ln (z/a) - 2a' z \ln (z/a) + x' \cdot 2z \ln (z/a)] \\ &= c (\varphi_a' + x' \varphi_b') \end{aligned} \quad (1)$$

Bild 1. Darstellung des Problems

φ_a' und φ_b' sind Potentialfunktionen:

$$\varphi_a' = \operatorname{Re} [-z^2 \ln (z/a) - 2a' z \ln (z/a)]; \quad \varphi_b' = \operatorname{Re} [2z \ln (z/a)] \quad (2).$$

Ebenso wird w_0 für den rechten Rand umgeformt:

$$w_0 = c (\varphi_a'' + x'' \varphi_b'') \quad (3)$$

mit

$$\varphi_a'' = \operatorname{Re} [-z \ln (z/a) + 2a'' z \ln (z/a)]; \quad \varphi_b'' = \operatorname{Re} [2z \ln (z/a)] \quad (4).$$

Bei der Befriedigung der Randbedingungen erhalten wir weitere Potentialfunktionen, deren singuläre Stellen in den Punkten O_1, O_2 usw. bzw. O_{-1}, O_{-2} usw. liegen. Diese Punkte erhält man

durch fortgesetzte Spiegelung des Punktes O an den zwei Längsseiten, siehe Bild 2. Diese Punkte wählen wir als Anfangspunkte der Koordinatensysteme $x_1, y_1; x_2, y_2$ usw. bzw. $x_{-1}, y_{-1}; x_{-2}, y_{-2}$ usw.

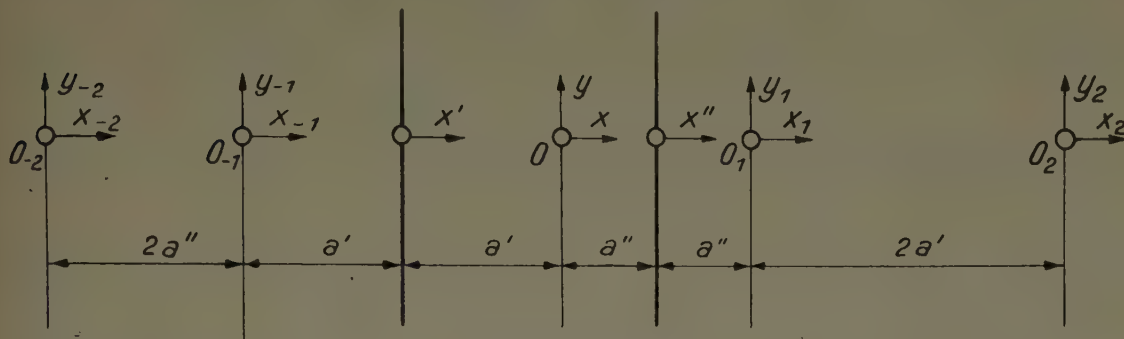


Bild 2. Singuläre Stellen

2. Randbedingungen des eingespannten Randes

Die Randbedingungen lauten:

$$w_{Rd} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{Rd} = 0.$$

Die Lösung für w/c bestehe aus gegebenen Gliedern $\varphi_a + x \varphi_b$; die singulären Stellen der Potentialfunktionen φ_a und φ_b befinden sich rechts vom Rande. Wir suchen weitere Glieder für w/c , so daß die zwei Randbedingungen erfüllt sind. Hierzu wählen wir Potentialfunktionen φ_c und φ_d mit singulären Stellen rechts vom Rande und spiegeln dieselben am Rande. Die gespiegelten Potentialfunktionen bezeichnen wir mit φ_{cSp} und φ_{dSp} . Zwischen einer Funktion $f(x', y')$ und ihrer Spiegelung besteht die Beziehung

$$f(x', y') = f_{Sp}(-x', y').$$

Am Rande $x' = 0$ wird

$$f_{Rd} = (f_{Sp})_{Rd}.$$

Für die Ableitungen senkrecht zum Rande erhalten wir

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{Rd} = - \left(\frac{\partial f_{Sp}}{\partial x} \right)_{Rd}$$

und weiter

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{Rd} = + \left(\frac{\partial^2 f_{Sp}}{\partial x^2} \right)_{Rd} \text{ usw.}$$

Nun bestimmen wir die Funktionen φ_c und φ_d und damit auch φ_{cSp} und φ_{dSp} .

Wir setzen

$$w/c = \varphi_a + x' \varphi_b + \varphi_{cSp} + x' \varphi_{dSp} \dots \dots \dots (5).$$

Die Randbedingung $w_{Rd} = 0$ gibt mit $x' = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{aRd} + (\varphi_{cSp})_{Rd} &= 0, \\ \varphi_{bRd} + \varphi_{cRd} &= 0, \\ \varphi_c &= -\varphi_a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5a).$$

Die Randbedingung $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{Rd} = 0$ gibt

$$\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x} + \varphi_b + \frac{\partial \varphi_{cSp}}{\partial x} + \varphi_{dSp} \right)_{Rd} = 0.$$

Hieraus

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_{dSp})_{Rd} &= - \left(\varphi_b + \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{cSp}}{\partial x} \right)_{Rd}, \\ \varphi_{dRd} &= - \left(\varphi_b + \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_c}{\partial x} \right)_{Rd} \\ &= - \left(\varphi_b + 2 \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right)_{Rd}, \\ \varphi_d &= - \left(\varphi_b + 2 \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5b).$$

Wir erhalten hiermit

$$w = \varphi_a + x' \varphi_b - \varphi_{as} - x' \left(\varphi_{bs} - 2 \frac{\partial \varphi_{as}}{\partial x} \right).$$

Die singulären Stellen der gespiegelten Funktionen liegen links vom Rande.

3. Randbedingungen des freien Randes

Die Randbedingungen des freien Randes folgen aus den Bedingungen, die besagen, daß dort weder Randmomente noch Querkräfte angreifen:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{Rd} = 0,$$

$$q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{Rd} = 0.$$

Die Lösung w/c bestehe wieder aus den gegebenen Gliedern $\varphi_a + x' \varphi_b$; die singulären Stellen der Potentialfunktionen φ_a und φ_b befinden sich jetzt links vom Rande. Wir suchen weitere Glieder für w/c , so daß die Randbedingungen erfüllt sind. Hierzu wählen wir die Potentialfunktionen φ_e und φ_f mit singulären Stellen links vom Rande und spiegeln sie am Rande.

Wir erhalten hiermit

$$w/c = \varphi_a + x' \varphi_b + \varphi_{es} + x' \varphi_{fs} \dots \dots \dots (6).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Randbedingungen ein, wobei wir berücksichtigen, daß $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ ist und x' am Rande gleich Null wird:

$$\left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi_b}{\partial x} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi_{es}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi_{fs}}{\partial x} \right]_{Rd} = 0,$$

$$\left[-(1 - \nu) \frac{\partial^3 \varphi_a}{\partial x^3} + (1 + \nu) \frac{\partial^3 \varphi_b}{\partial x^3} - (1 - \nu) \frac{\partial^3 \varphi_{es}}{\partial x^3} + (1 + \nu) \frac{\partial^3 \varphi_{fs}}{\partial x^3} \right]_{Rd} = 0.$$

Anstelle der gespiegelten Funktionen führen wir die nichtgespiegelten ein, wobei bei ungeraden Ableitungen das Vorzeichen zu ändern ist:

$$\left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi_b}{\partial x} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \varphi_f}{\partial x} \right]_{Rd} = 0,$$

$$\left[-(1 - \nu) \frac{\partial^3 \varphi_a}{\partial x^3} + (1 + \nu) \frac{\partial^3 \varphi_b}{\partial x^3} + (1 - \nu) \frac{\partial^3 \varphi_e}{\partial x^3} + (1 + \nu) \frac{\partial^3 \varphi_f}{\partial x^3} \right]_{Rd} = 0.$$

Da die Funktionen am Rande übereinstimmen und ihre singulären Stellen auf derselben Seite vom Rande liegen, können wir das Zeichen Rd fortlassen. Weiter integrieren wir die erste Gleichung einmal nach x , die zweite Gleichung zweimal nach x , wobei wir die Integrationskonstanten gleich Null setzen:

$$(1 - \nu) \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} + 2 \varphi_b + (1 - \nu) \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} - 2 \varphi_f = 0,$$

$$-(1 - \nu) \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} + (1 + \nu) \varphi_b + (1 - \nu) \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} + (1 + \nu) \varphi_f = 0.$$

Hieraus folgt für die gesuchten Potentialfunktionen φ_e und φ_f :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} &= \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} - 4 \frac{1 + \nu}{(1 - \nu)(3 + \nu)} \varphi_b, \\ \varphi_f &= \frac{1}{3 + \nu} \left(\varphi_b + 2 \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6a).$$

Aus der ersten Gleichung folgt φ_e durch Integration, wobei es auf die Integrationskonstante nicht ankommt:

$$\varphi_e = \frac{1 - \nu}{3 + \nu} \varphi_a - 4 \frac{1 + \nu}{(1 - \nu)(3 + \nu)} \int \varphi_b dx \dots \dots \dots (6b).$$

4. Erste Näherung

Wir beginnen mit der Grundlösung $\frac{w_0}{c}$, zu der wir noch das Glied $\text{Re } \alpha x^2 z$ hinzufügen. Dieses gibt für die gesamte Platte das konstante Biegemoment $m_x = -2 \alpha D c$; α bestimmen wir später so, daß die Gesamtlösung bestimmte Bedingungen im Unendlichen erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{c} &= \text{Re} [-z^2 \ln(z/a) + 2 x z \ln(z/a) + \alpha x z] \\ &\equiv \text{Re} [-z^2 \ln(z/a) - 2 \alpha' z \ln(z/a) - \alpha a' z + x' (2 z \ln(z/a) + \alpha z)]. \end{aligned}$$

Diese Grundlösung ergänzen wir so, daß die Randbedingungen für den freien Rand $x' = 0$, $x = -a'$ erfüllt sind. Hierzu müssen wir zu $\frac{w_0}{c}$ weitere Glieder nach Gl. (5), (5a) und 5(b) hinzufügen. Die auftretenden neuen Potentialfunktionen haben ihre singularen Stellen im Punkte O_{-1} ; wir bezeichnen die hinzukommende Funktion mit $\frac{w_{-1}}{c}$. Wir erhalten hiermit als erste Näherung die eingespannte Platte, die sich von $x' = 0$ bis $x' \rightarrow \infty$ erstreckt. Aus $\frac{w_0}{c}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \text{Re} [-z^2 \ln(z/a) - 2 a' z \ln(z/a) - \alpha a' z], \\ \varphi_b &= \text{Re} [2 z \ln(z/a) + \alpha z]. \end{aligned}$$

Hieraus

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \text{Re} [z^2 \ln(z/a) + 2 a' z \ln(z/a) + \alpha a' z], \\ \varphi_d &= \text{Re} [2 z \ln(z/a) - \alpha z + 2 z + 4 a' \ln(z/a) + 4 a' + 2 \alpha a']. \end{aligned}$$

Wir wollen uns auf die Bestimmung der Momente und Querkräfte beschränken. Dann können wir die unterstrichenen Glieder fortlassen. Bei der Spiegelung wird aus $\ln(z/a)$ die Funktion $\ln \frac{z_{-1}}{a}$, diese bezeichnen wir abgekürzt mit l_{-1} ; ebenso $\ln(z/a)$ mit l_0 . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varphi_{cs_p} &= \text{Re} [z_{-1}^2 l_{-1} - 2 a' z_{-1} l_{-1}], \\ \varphi_{ds_p} &= \text{Re} [-2 z_{-1} l_{-1} + \alpha z_{-1} - 2 z_{-1} + 4 a' l_{-1}]. \end{aligned}$$

Hiermit

$$\begin{aligned} w &= \frac{w_0}{c} + \frac{w_{-1}}{c} = \text{Re} [-z^2 l_0 - 2 a' z l_0 + x' (2 z l_0 + \alpha z) \\ &\quad + z_{-1}^2 l_{-1} - 2 a' z_{-1} l_{-1} + x' (-2 z_{-1} l_{-1} + \alpha z_{-1} - 2 \alpha z_{-1} + 4 a' l_{-1})]. \end{aligned}$$

Berechnen wir m_x für die Einspannlinie, so heben sich die zweiten Ableitungen fort bis auf die der unterstrichenen Glieder. Für diese erhalten wir das Moment

$$\begin{aligned} m_x &= -D c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{Re} [x' (\alpha z + \alpha z_{-1} - 2 z_{-1} + 4 a' l_{-1})] \\ &= -D c \cdot 2 \left(2 \alpha - 2 + 4 a' \frac{x_{-1}^{-1}}{r_{-1}^2} \right). \end{aligned}$$

Damit das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} m_x dy$ für den eingespannten Rand endlich bleibt, wird $\alpha = 1$ gesetzt.

Hierbei wird m_x für $y \rightarrow \infty$ gleich Null. Das Moment m_x und die Querkraft q_x werden:

$$\begin{aligned} m_x &= -D c \left[(1 + \nu) \ln \frac{r^2}{r_{-1}^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{x_{-1}^2}{r_{-1}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 8 a' \frac{x_{-1}}{r_{-1}^2} - 4(1 - \nu) a' x' \frac{x_{-1}^2 - y_{-1}^2}{r_{-1}^4} \right], \\ q_x &= -\frac{D c}{a'} \left[\left(4 \frac{a' x}{r^2} + 2(1 - \nu) \frac{a' x(x^2 - y^2)}{r^4} \right) - \left(4 \frac{a' x_{-1}}{r_{-1}^2} + 2(1 - \nu) \frac{a' x_{-1}(x_{-1}^2 - y^2)}{r_{-1}^4} \right) \right. \\ &\quad \left. - 4(1 + \nu) a'^2 \frac{x_{-1}^2 - y^2}{r_{-1}^4} - 8(1 - \nu) a'^2 x' \frac{x_{-1}^3 - 3 x_{-1} y^2}{r_{-1}^6} \right]. \end{aligned}$$

Auf der Einspannlinie wird:

$$m_{x, x'=0} = -Dc \cdot 8 \frac{a'^2}{a'^2 + y^2}$$

und

$$q_{x, x'=0} = -\frac{Dc}{a'} \cdot 16 \frac{a'^4}{(a'^2 + y^2)^2}.$$

Bilden wir die Integrale längs der Einspannlinie, so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_x dy = -Dc \cdot 8\pi a' = -Pa'$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_x dy = -Dc \cdot 8\pi = -P.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt, daß diese Integrale für das Gebiet $x' < a'$ die Werte $-Px$ bzw. $-P$ geben, während sie für $x' > a'$ gleich Null werden.

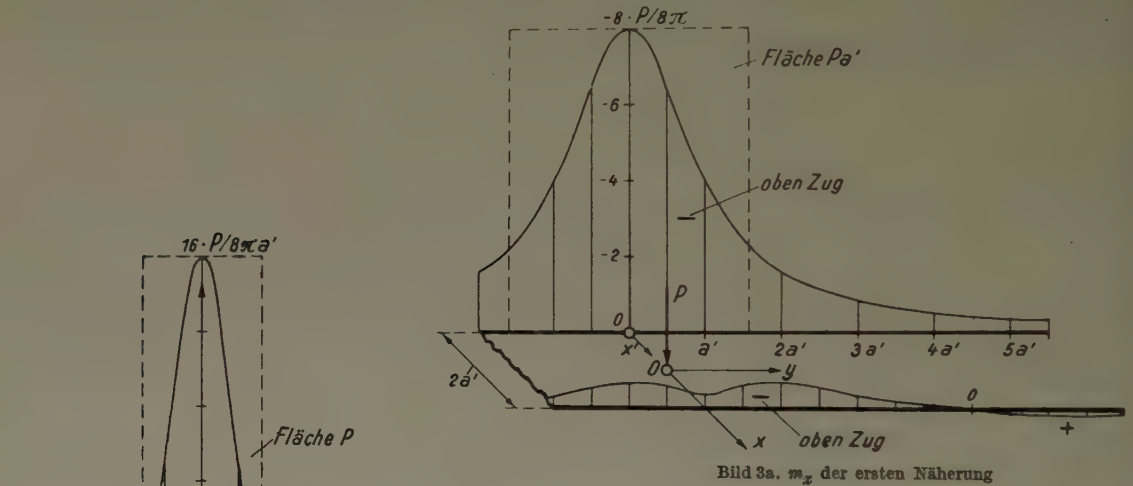


Bild 3b. q_x für $x' = 0$ und $-q_x$ für $x' = 2a'$ der ersten Näherung

Für $x' = 0$ und $x' = 2a'$ zeigt Bild 3a die Verteilung von m_x und Bild 3b die Verteilung von q_x . Das Ergebnis ist für $x' = 0$ unabhängig von ν ; für $x' = 2a'$ ist $\nu = 0$ gesetzt.

Wir erhalten hiermit die Lösung der Platte, die sich von $x' = 0$ bis ∞ erstreckt und am Rande $x' = 0$ eingespannt ist. Sie ist zugleich die erste Näherung für den Plattenstreifen. Nehmen wir einen Streifen von der Breite $a = 2a'$, so erhalten wir am freien Rand die in den Bildern 3a und 3b dargestellten geringen Restwerte. Wir zeigen, wie man mit Hilfe derselben das Moment m_x auf der Einspannlinie im Punkt $x' = 0$, $y = 0$ abschätzen kann. Das Restmoment m_x am freien Rande ist für eine größere Länge, die das Mehrfache von a' ist, ungefähr gleich $-0,5 \cdot \frac{P}{8\pi}$. Wir überlagern das konstante Moment $m_x = +0,5 \cdot \frac{P}{8\pi}$ und müssen dann diesen Betrag auch am eingespannten Rande hinzufügen. Die Querkräfte q_x je Längeneinheit am freien

Rande sind in der Umgebung des Punktes $-x' = 2a', y = 0$ nach oben gerichtet und geben eine Restkraft von ungefähr $0,11 \frac{P}{8\pi}$. Die Kraft P im Abstände a' gibt ein Biegemoment in der Mitte der Einspannlinie von -8 bis $-9 \cdot \frac{P}{8\pi}$. Beseitigen wir die Restkraft durch eine entgegengesetzte Kraft, so ruft diese entsprechend das Biegemoment von etwa $-9 \cdot 0,11 \frac{P}{8\pi} = -\frac{P}{8\pi}$ hervor. Wir erhalten als Summe

$$\underline{m_{x, x'=0, y=0}} = -(8 - 0,5 + 1) \frac{P}{8\pi} = -0,34 P.$$

5. Zweite Näherung

Unsere erste Näherung stellt einen Teil der analytischen Fortsetzung für w/c dar für das Gebiet $x' < 0$. Befriedigen wir nunmehr die Randbedingungen des freien Randes, so erhalten wir einen Teil der analytischen Fortsetzung für das Gebiet $x' < a$. Hierbei gibt w_0/c die Funktion w_1/c , und w_{-1}/c entsprechend die Funktion w_2/c . Die singulären Stellen der Potentialfunktionen liegen im Punkte O_1 für w_1/c und im Punkte O_2 für w_2/c .

Der Kürze wegen schreiben wir l_i für $\ln(z_i/a)$. Belanglose lineare Glieder sind fortgelassen.

Berechnung von $\frac{w_1}{c}$ aus $\frac{w_0}{c}$:

$$\frac{w_0}{c} = \operatorname{Re} [-z^2 l_0 + 2a'' z l_0 + x''(2z l_0 + z)],$$

$$\varphi_a = \operatorname{Re} [-z^2 l_0 + 2a'' z l_0],$$

$$\varphi_b = \operatorname{Re} [2z l_0 + z],$$

$$\varphi_e = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-z^2 l_0 + 2a'' z l_0] - 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [z^2 l_0],$$

$$\varphi_f = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-2z l_0 - z + 4a'' l_0],$$

$$\frac{w_1}{c} = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-z_1^2 l_1 - 2a'' z_1 l_1 + x''(2z_1 l_1 + z_1 + 4a'' l_1)] - 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [z_1^2 l_1]$$

$$= \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-z_1^2 l_1 - 2(a+a'') z_1 l_1 - 4a a' l_1 + x'(2z_1 l_1 + z_1 + 4a'' l_1)]$$

$$- 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [z_1^2 l_1].$$

Berechnung von $\frac{w_2}{c}$ aus $\frac{w_{-1}}{c}$:

$$\frac{w_{-1}}{c} = \operatorname{Re} [z_{-1}^2 l_{-1} - 2(a+a') z_{-1} l_{-1} + 4a a' l_{-1} + x''(-2z_{-1} l_{-1} - z_{-1} + 4a' l_{-1})],$$

$$\varphi_a = \operatorname{Re} [z_{-1}^2 l_{-1} - 2(a+a') z_{-1} l_{-1} + 4a a' l_{-1}],$$

$$\varphi_b = \operatorname{Re} [-2z_{-1} l_{-1} - z_{-1} + 4a' l_{-1}],$$

$$\varphi_e = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [z_{-1}^2 l_{-1} - 2(a+a') z_{-1} l_{-1} + a a' l_{-1}] - 4a a' l_{-1}$$

$$- 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [-z_{-1}^2 l_{-1} + 4a' z_{-1} l_{-1}],$$

$$\varphi_f = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [2z_{-1} l_{-1} + z_{-1} - 4a l_1 + 8a a' z_{-1}^{-1}],$$

$$\frac{w_2}{c} = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [z_2^2 l_2 + 2(a+a') z_2 l_2 + 4a a' l_2 + x''(-2z_2 l_2 - z_2 - 4a l_2 - 8a a' z_2^{-1})]$$

$$- 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [-z_2^2 l_2 - 4a' z_2 l_2]$$

$$= \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [z_2^2 l_2 + 2(2a+a') z_2 l_2 + 4a(a+a') l_2 + 8a^2 a' z^{-1}]$$

$$+ x'(-2z_2 l_2 - z_2 - 4a l_2 - 8a a' z_2^{-1})]$$

$$- 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [-z_2^2 l_2 - 4a' z_2 l_2].$$

Der Ausdruck $(w + w_{-1})/c + (w_1 + w_2)/c$ befriedigt die Randbedingungen des freien Randes; die Randbedingungen des eingespannten Randes sind jedoch nur für $(w + w_{-1})/c$ erfüllt. Nunmehr ergänzen wir die Lösung durch Hinzufügung von w_{-2}/c und w_{-3}/c , so daß sowohl $(w_1 + w_{-2})/c$ als auch $(w_2 + w_{-3})/c$ die Randbedingungen des eingespannten Randes erfüllen.

Berechnung von $\frac{w_{-2}}{c}$ aus $\frac{w_1}{c}$:

$$\varphi_a = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-z_1^2 l_1 - 2(a + a') z_1 l_1 - 4 a a' l_1] - 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [z_1^2 l_1],$$

$$\varphi_b = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [2 z_1 l_1 + z_1 + 4 a' l_1],$$

$$\varphi_c = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [z_1^2 l_1 + 2(a + a') z_1 l_1 + 4 a a' l_1] - 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [-z_1^2 l_1],$$

$$\varphi_d = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [2 z_1 l_1 + z_1 + 4 a l_1 + 8 a a' z_1^{-1}] - 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [-4 z_1 l_1 - 2 z_1],$$

$$\begin{aligned} \frac{w_{-2}}{c} &= \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [z_{-2}^2 l_{-2} - 2(a + a') z_{-2} l_{-2} + 4 a a' l_{-2} + x'(-2 z_{-2} l_{-2} - z_{-2} + 4 a l_{-2} - 8 a a' z_{-2}^{-1})] \\ &\quad - 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [-z_{-2}^2 l_{-2} + x'(4 z_{-2} l_{-2} + 2 z_{-2})]. \end{aligned}$$

Berechnung von $\frac{w_{-3}}{c}$ aus $\frac{w_2}{c}$:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [z_2^2 l_2 + 2(2 a + a') z_2 l_2 + 4 a(a + a') l_2 + 8 a^2 a' z_2^{-1}] \\ &\quad - 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [-z_2^2 l_2 - 4 a' z_2 l_2], \end{aligned}$$

$$\varphi_b = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-2 z_2 l_2 - z_2 - 4 a l_2 - 8 a a' z_2^{-1}],$$

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-z_2^2 l_2 - 2(2 a + a') z_2 l_2 - 4 a(a + a') l_2 - 8 a^2 a' z_2^{-1}] \\ &\quad - 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [z_2^2 l_2 + 4 a' z_2 l_2], \end{aligned}$$

$$\varphi_d = \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-2 z_2 l_2 - z_2 - 4(a + a') l_2 - 8 a^2 z_2^{-1} + 16 a^3 a' z_2^{-2}]$$

$$- 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [4 z_2 l_2 + 2 z_2 + 8 a' l_2],$$

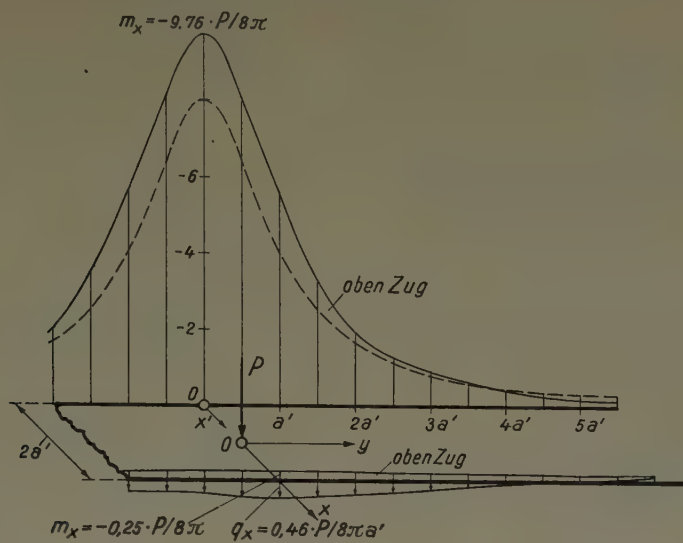
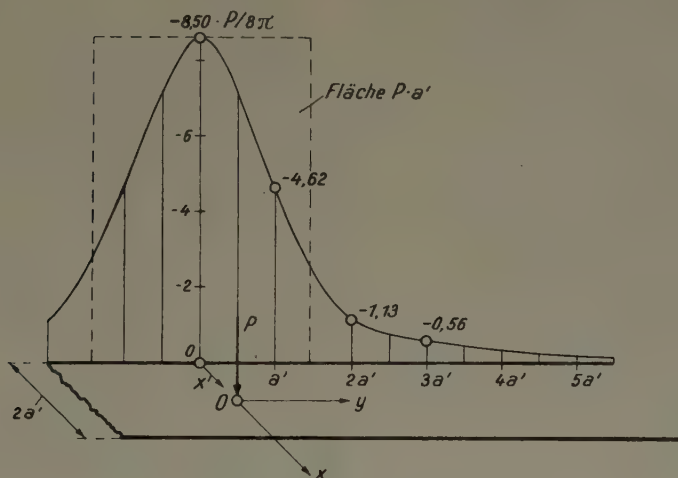
$$\begin{aligned} \frac{w_{-3}}{c} &= \frac{1-\nu}{3+\nu} \operatorname{Re} [-z_{-3}^2 l_{-3} + 2(2 a + a') z_{-3} l_{-3} - 4 a(a + a') l_{-3} + 8 a^2 a' z_{-3}^{-1} \\ &\quad + x'(2 z_{-3} l_{-3} + z_{-3} - 4(a + a') l_{-3} + 8 a^2 z_{-3}^{-1} + 16 a^2 a' z_{-3}^{-2})] \end{aligned}$$

$$- 4 \frac{1+\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} \operatorname{Re} [z_{-3}^2 l_{-3} - 4 a' z_{-3} l_{-3} + x'(-4 z_{-3} l_{-3} - 2 z_{-3} + 8 a' l_{-3})].$$

Wir berechnen nunmehr m_x und q_x für die Randpunkte eines Streifens mit $a = 2 a'$, also für die Stellen $x' = 0$ und $x' = 2 a'$ mit $\nu = 0$. In Bild 4 sind die Momente eingezeichnet und ebenfalls q_x für den freien Rand. Die Restwerte sind jetzt so langgestreckt, daß man sie vereinfacht nach der gewöhnlichen Balkentheorie berücksichtigen kann. Wir erhalten dann am eingespannten Rande die im Bilde 5 aufgezeichnete Verteilung von m_x ; für $y = 0$ insbesondere erhalten wir den früheren Wert:

$$m_{x, x'=0, y=0} = -(8,00 + 1,76 - 0,25 - 2 \cdot 0,46) \cdot \frac{P}{8\pi} = -8,59 \frac{P}{8\pi} = -0,34 P.$$

Natürlich ist es möglich, die Restwerte durch weitere Näherungen herabzumindern oder mit Hilfe von FOURIER-Integralen genauer zu bestimmen.

Bild 4. $m_x, x' = 0$, $m_x, x' = 2a'$ und $q_x, x' = 2a'$ der zweiten NäherungBild 5. m_x für den eingespannten Rand

Ausblicke

Lassen wir $a' \rightarrow a$, $a'' \rightarrow 0$ gehen, so erhalten wir die Lösung für den eingespannten Plattenstreifen mit Randkraft. Bei der Berechnung ist die Reihenfolge der Näherungen $\frac{w_0}{c}$, $\frac{w_{-1}}{c}$, $\frac{w_1}{c}$, $\frac{w_2}{c}$ usw. einzuhalten.

Das Verfahren läßt sich auch für andere Belastungsfälle anwenden. So könnte man auf der x' -Achse eine Strecklast von b_1 bis b_2 , $0 < b_1 < b_2 < a$ annehmen oder die Belastung einer kleinen Kreisfläche um den Punkt O. Von Belang ist nur, daß man w_0 durch eine analytische Funktion ausdrücken kann.

Manuskripteingang: 2. 2. 60

Anschrift: Prof. em. Dr.-Ing. C. WEBER, Hannover, Hindenburgstr. 39

KLEINE MITTEILUNGEN

On the Stress Distribution of the Rotating Circular Ring Type Shell

In this paper, the author wishes to describe the stress distribution on the surface of rotating circular ring type shell by W. HOFFERBERTH's theory of the static dynamics of pneumatic tire [1].

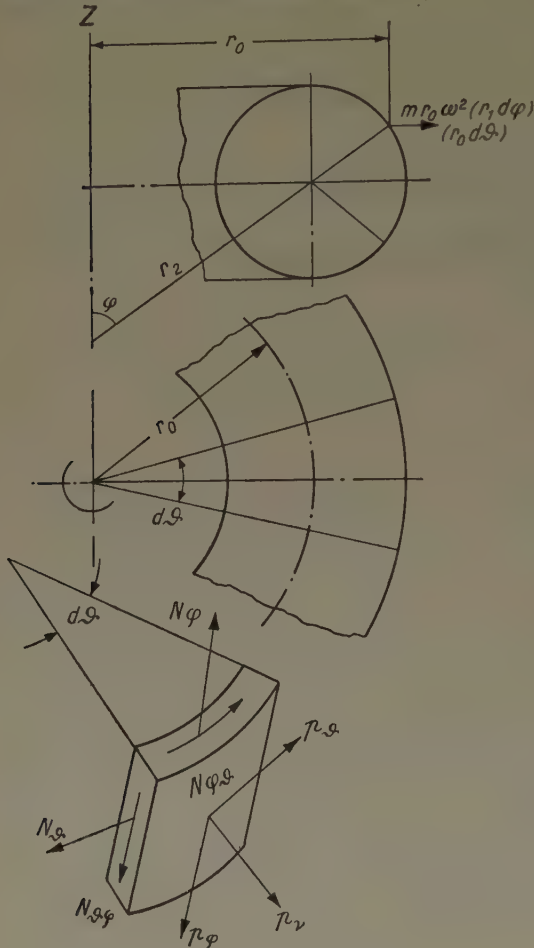


Fig. 1

The stress components can be seen in Fig. 1, and when we put

m = mass of shell element of unit area and unit thickness,

p = internal pressure (i. e. air pressure in tire),

ω = angular velocity of the rotating shell,

then the stresses must satisfy the following equations

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial (N_{\theta\phi} \cdot r_0)}{\partial \phi} + N_{\theta\phi} \cos \phi + p_\theta r_0 = 0 \quad (1),$$

$$\frac{\partial (N_\phi r_0)}{\partial \phi} + \frac{\partial N_{\theta\phi}}{\partial \theta} r_1 - N_\phi r_1 \cos \phi + p_\phi r_0 r_1 + m r_1 r_0^2 \omega^2 \cos \phi = 0 \quad (2),$$

$$\frac{r_2}{r_1} N_\phi + N_\theta - p_r r_2 - m r_0^2 \omega^2 = 0 \quad (3).$$

When we put

$$T = N_\phi \theta = N_\theta \phi, \quad r_0 = y$$

and write the meridian curve as $y = y(z)$, and further

$$\frac{dy}{dz} = y' \quad \text{and} \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = y'',$$

next relations can be obtained

$$\frac{1}{r_1} = \frac{-y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

$$\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos \phi = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{d\phi} = \frac{\cos \phi}{y'} \frac{1}{dz},$$

and further we choose \bar{N}_θ and \bar{N}_ϕ as follows

$$\bar{N}_\phi = \frac{y \cdot \cos \phi}{y'} N_\phi,$$

$$\bar{N}_\theta = \frac{y'}{y \cdot \cos \phi} N_\theta,$$

then the equations (1), (2), (3) become as follows

$$\frac{\partial \bar{N}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial z} + 2 \frac{y'}{y} T + \sqrt{1+y'^2} P_\theta = 0 \quad (4),$$

$$\frac{\partial \bar{N}_\phi}{\partial z} + \bar{N}_\phi \frac{y' y''}{1+y'^2} - \bar{N}_\theta \frac{y y'}{1+y'^2} + \frac{\partial T}{\partial \theta} + P_\phi y + m y^2 \omega^2 \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \quad (5),$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} \bar{N}_\theta - \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} \bar{N}_\phi - p_r y \sqrt{1+y'^2} - m y^2 \omega^2 = 0 \quad (6).$$

When we calculate the value p_r from the equation (6), and put it into the equation (5), the equation (5) can be written as follows

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{N}_\phi}{\partial z} + p_\phi y - y y' p_r + m y^2 \omega^2 \frac{2 y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \quad (7),$$

and the equation (6) becomes

$$\bar{N}_\theta - \frac{y'}{y} \bar{N}_\phi - (1+y'^2) p_r - m y \omega^2 \sqrt{1+y'^2} = 0 \quad (8).$$

For example, we choose the shell with circular section as shown in Fig. 2, then the relations

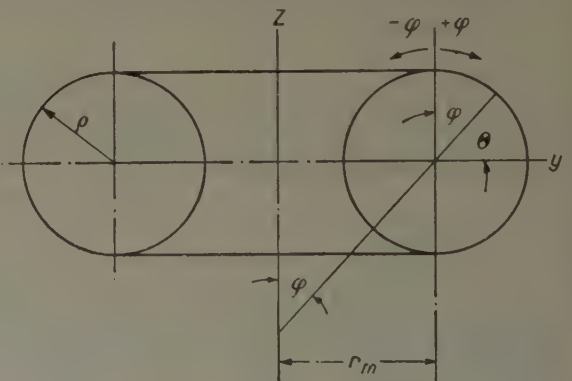


Fig. 2

$$(y - r_m)^2 + z^2 = r_m^2$$

$$y' = \frac{-z}{\sqrt{r_m^2 - z^2}}, \quad y'' = \frac{-r_m^2}{\sqrt{(r_m^2 - z^2)^3}},$$

$$\sin \phi = \frac{1}{r_m} \sqrt{r_m^2 - z^2}, \quad \cos \phi = \frac{-z}{r_m},$$

$$r_1 = r_m,$$

$$r_2 = \frac{r_m y}{y - r_m}$$

can be seen, and further we put

$$p_\theta = 0, \quad p_\varphi = 0, \quad p_r = p, \quad T = 0$$

and

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0,$$

for the symmetrical stress distribution, then the equation (7) become as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_\varphi}{\partial z} = & -p \left(r_m \frac{z}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}} + z \right) \\ & - \frac{2m}{\varrho} (r_m + \sqrt{\varrho^2 - z^2})^3 \omega^2 z. \end{aligned}$$

By integration under the boundary condition of $\bar{N} = 0$ at $z = \varrho$, we can obtain next relation from above equation

$$\frac{N_\varphi}{\varrho p} = A + \frac{m r_m \omega^2}{p} B,$$

where

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_m}{y} \right),$$

$$\begin{aligned} B = & \left(\frac{r_m}{y} - 1 \right) \left[\left(1 - \frac{\varrho}{r_m} \right)^2 \cdot \left(\frac{r_m}{\varrho} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{\varrho} - \frac{r_m}{\varrho} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{\varrho} \right) \cdot \left(\frac{\varrho}{r_m} + \frac{z}{r_m} \right) \right]. \end{aligned}$$

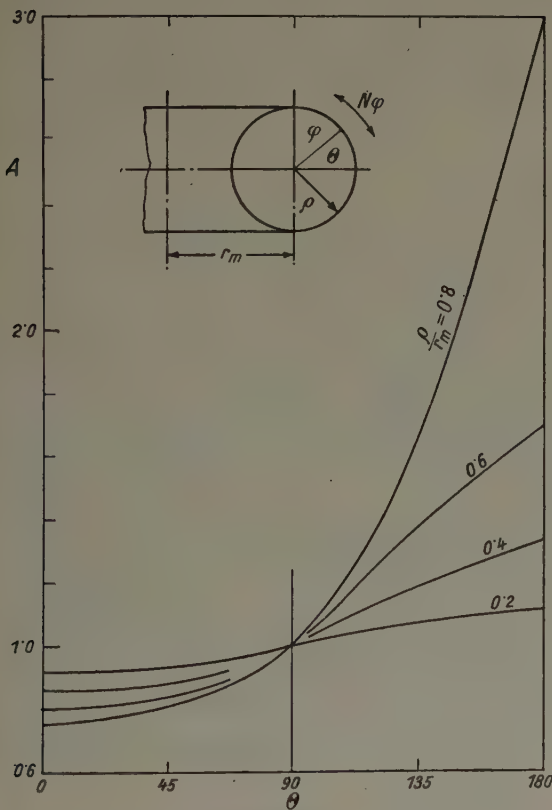


Fig. 3

The values of A and B can be seen in Fig. 3 and 4, and the stress N_θ can be written as follows from equation (3)

$$\frac{N_\theta}{\varrho p} = C + \frac{m r_m \omega^2}{p} D,$$

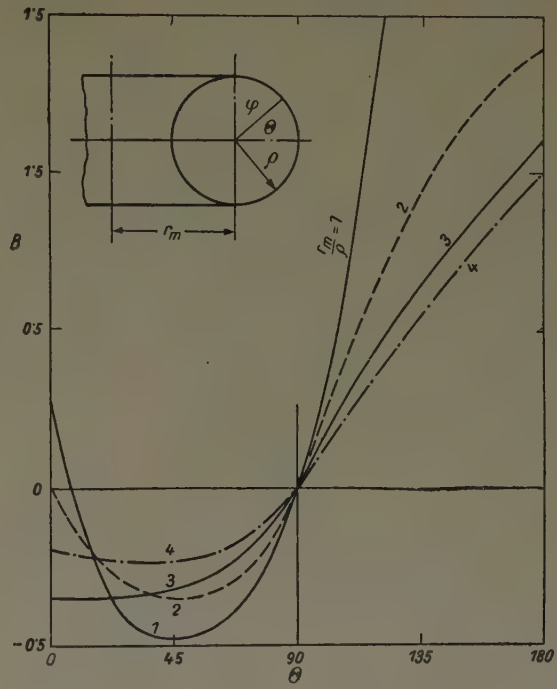


Fig. 4

where $\varrho = r_1$,

$$C = \frac{r_2}{\varrho} - \frac{r_2}{r_1} A = \frac{r_2}{\varrho} (1 - A),$$

$$D = \frac{r_2}{r_1} B + \frac{r_0}{r_m} \cdot \frac{r_0}{\varrho} = \frac{r_2}{\varrho} B + \frac{r_0}{r_m} \cdot \frac{r_0}{\varrho}.$$

The values of C and D can be seen in Fig. 5 and 6.

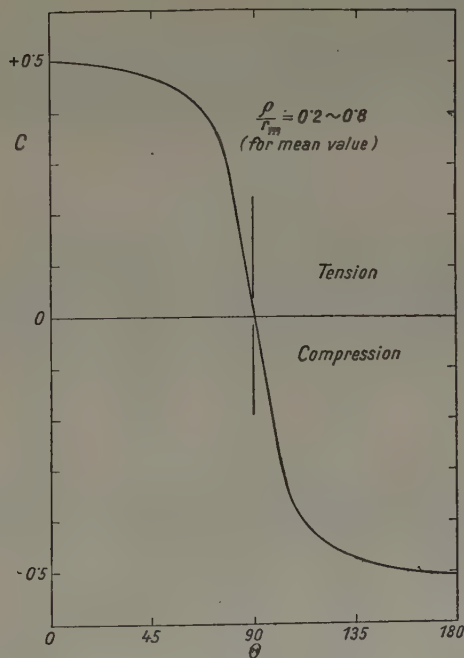


Fig. 5

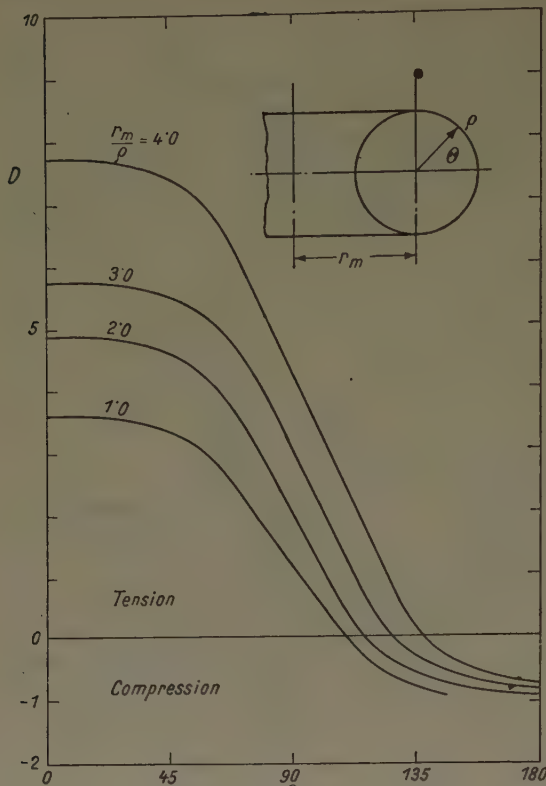


Fig. 6

References

- [1] W. HOFFERBERTH, Zur Statik des Luftreifens, Kautschuk und Gummi 8 (1954), S. 124–130.

Verfasser: Prof. Dr. SYŌGO MATSUNAGA, Bridgestone Tire Co. Ltd., Dept. of Tire Design, Kyo-machi 105, Kurume-City, Fukuoka-Pref. (Japan)

Zur Stabilität des Nyströmschen Verfahrens

1. Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}); & y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) &= y^{(n-1)}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1).$$

Zur Lösung werde ein Näherungsverfahren benutzt. Bei exakter Rechnung (die infolge der notwendigen Rundungen i. a. nicht durchführbar ist) liefere das Verfahren an der Stelle x_n den Lösungsvektor

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y'_n \\ \vdots \\ y^{(n-1)}_n \end{pmatrix} \quad \dots \quad (2),$$

der sich von der exakten Lösung der Anfangswertaufgabe (1) noch durch den hier nicht betrachteten Verfahrensfehler unterscheidet. Benutzt man nun an der Stelle x_n für die weitere Rechnung statt (2) den durch Rundungsfehler etwas verfälschten Vektor

$$\begin{pmatrix} y_n + \eta_n \\ y'_n + \eta'_n \\ \vdots \\ y^{(n-1)}_n + \eta^{(n-1)}_n \end{pmatrix},$$

so liefert das Verfahren an den Stellen x_v ($v = n+1, n+2, \dots$) (unter der Voraussetzung, daß exakt weitergerechnet wird) veränderte Vektoren

$$\begin{pmatrix} y_v + \eta_v \\ y'_v + \eta'_v \\ \vdots \\ y^{(n-1)}_v + \eta^{(n-1)}_v \end{pmatrix}.$$

Wie QUADE [1] nennen wir das Verfahren stabil, wenn die Folge der Vektoren

$$\delta_v = \begin{pmatrix} \eta_v \\ \eta'_v \\ \vdots \\ \eta^{(n-1)}_v \end{pmatrix} \quad (v = n+1, n+2, \dots)$$

gegen den Nullvektor konvergiert. Anderenfalls heiße das Verfahren instabil.

Gegenstand der bisherigen Untersuchungen waren vorwiegend die Differentialgleichungen erster Ordnung [1], [2], [3]. Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung wurde bisher vor allem die Stabilität der Differenzenschemaverfahren untersucht.

In dieser Arbeit sollen einige Betrachtungen über die Stabilität des RUNGE-KUTTA-Verfahrens angestellt werden.

Wir nehmen dabei an, daß die Ableitungen

$$f_y, f_{y'}, \dots, f_{y^{(n-1)}} \dots \dots \dots (3)$$

konstant sind, die Differentialgleichung (1) also von der Form

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} &= q(x) + P_0 y + P_1 y' + \dots + P_{n-1} y^{(n-1)}; \\ P_j &= \text{const} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ist. Diese Annahme, von der in der Literatur meist ausgegangen wird, ist auch dann noch berechtigt, wenn innerhalb des Intervalls, in dem die Lösung gesucht ist, die Funktionen (3) nicht wesentlich variieren.

2. Bei Anwendung des RUNGE-KUTTA-Verfahrens auf die Differentialgleichung (4) ergibt sich δ_{n+1} aus δ_n mittels einer linearen Transformation

$$\delta_{n+1} = \mathcal{A} \delta_n,$$

also

$$\delta_v = \mathcal{A}^{v-n} \delta_n.$$

Dabei sind die Elemente der n -reihigen quadratischen Matrix \mathcal{A} Polynome in h , P_0, P_1, \dots, P_{n-1} (h = Schrittweite).

Notwendig und hinreichend für die Stabilität ist daher, daß die Matrizenfolge $\{\mathcal{A}^\mu\}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) gegen die Nullmatrix konvergiert, die Eigenwerte λ von \mathcal{A} also im Innern des Einheitskreises liegen. Die charakteristische Gleichung von \mathcal{A} stellt ein Polynom n -ten Grades in λ dar, dessen Koeffizienten wiederum Polynome in $h, P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ (genauer: in $h^n P_0 = p_0, h^{n-1} P_1 = p_1, \dots, h P_{n-1} = p_{n-1}$) sind. Es stößt daher auf große Schwierigkeiten, bei Differentialgleichungen höherer Ordnung den vollständigen Stabilitätsbereich im $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ -Raum angeben zu wollen. Hat man jedoch die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung erst einmal als Funktionen der p_j bestimmt, so ist es für jede spezielle Differentialgleichung (4) wohl möglich, zu prüfen, ob das Verfahren stabil ist oder nicht.

3. Zu der Matrix \mathcal{A} gelangt man z. B. bei Anwendung des RUNGE-KUTTA-Verfahrens auf die Anfangswertaufgabe

$$y'' = f(x, y, y') = q(x) + P_0 y + P_1 y';$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

(NYSTRÖM-Verfahren¹⁾) in folgender Weise:

¹⁾ Der Fall der Differentialgleichung erster Ordnung wurde bereits von LINIGER [2] gelöst.

Die Rechenvorschrift des NYSTRÖM-Verfahrens lautet bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{h^2}{2} f(x_n, y_n, y'_n), \\ k_2 &= \frac{h^2}{2} f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} y'_n + \frac{1}{4} k_1, y'_n + \frac{k_1}{h}\right), \\ k_3 &= \frac{h^2}{2} f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} y'_n + \frac{1}{4} k_1, y'_n + \frac{k_2}{h}\right), \\ k_4 &= \frac{h^2}{2} f\left(x_n + h, y_n + h y'_n + k_3, y'_n + 2 \frac{k_3}{h}\right), \\ k &= \frac{1}{3} (k_1 + k_2 + k_3), \\ \eta_{n+1} &= y_n + h y'_n + k, \\ K &= \frac{1}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4), \\ \eta'_{n+1} &= y'_n + 2 \frac{K}{h} \end{aligned} \right\} (5).$$

Benutzt man nun statt $\begin{pmatrix} y_n \\ y'_n \end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix} y_n + \eta_n \\ y'_n + \eta'_n \end{pmatrix}$, so erhält man statt der k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gewisse Werte $k_i + \delta k_i$ und damit

$$\left. \begin{aligned} \eta_{n+1} &= \eta_n + h \eta'_n + \frac{1}{3} (\delta k_1 + \delta k_2 + \delta k_3) \\ \eta'_{n+1} &= \eta'_n + \frac{1}{3h} (\delta k_1 + 2 \delta k_2 + 2 \delta k_3 + \delta k_4) \end{aligned} \right\} (6).$$

Die δk_i ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} \delta k_1 &= \frac{h^2}{2} [P_0 \eta_n + P_1 \eta'_n] \\ \delta k_2 &= \frac{h^2}{2} \left[P_0 \left(\eta_n + \frac{h}{2} \eta'_n + \frac{1}{4} \delta k_1 \right) + P_1 \left(\eta'_n + \frac{\delta k_1}{h} \right) \right], \\ \delta k_3 &= \frac{h^2}{2} \left[P_0 \left(\eta_n + \frac{h}{2} \eta'_n + \frac{1}{4} \delta k_1 \right) + P_1 \left(\eta'_n + \frac{\delta k_2}{h} \right) \right], \\ \delta k_4 &= \frac{h^2}{2} \left[P_0 (\eta_n + h \eta'_n + \delta k_3) + P_1 \left(\eta'_n + 2 \frac{\delta k_3}{h} \right) \right] \end{aligned} \right\} (7).$$

(6) und (7) liefern nun zusammen nach einfacher Zwischenrechnung

$$\left. \begin{aligned} \delta_{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^2}{2} P_0 + \frac{h^3}{6} P_0 P_1 + \frac{h^4}{24} (P_0^2 + P_0 P_1^2) + \frac{h^5}{96} P_0^2 P_1 \\ h P_0 + \frac{h^2}{2} P_0 P_1 + \frac{h^3}{6} (P_0^2 + P_0 P_1^2) + \frac{h^4}{24} (2 P_0^2 P_1 + P_0 P_1^2) + \frac{h^5}{96} (P_0^3 + 3 P_0^2 P_1^2) + \frac{h^6}{192} P_0^3 P_1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} h + \frac{h^2}{2} P_1 + \frac{h^3}{6} (P_0 + P_1^2) + \frac{h^4}{24} (2 P_0 P_1 + P_1^2) + \frac{h^5}{96} P_0 P_1^2 \\ 1 + h P_1 + \frac{h^2}{2} (P_0 + P_1^2) + \frac{h^3}{6} (2 P_0 P_1 + P_1^2) + \frac{h^4}{24} (P_0^2 + 3 P_0 P_1^2 + P_1^4) + \frac{h^5}{32} (P_0^2 P_1 + P_0 P_1^2) + \frac{h^6}{192} P_0^2 P_1^2 \end{pmatrix} \delta_n. \end{aligned} \right\}$$

Bezeichnen wir mit $a_{\sigma\sigma}$ die Elemente von \mathcal{A} , so lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21}}.$$

Es ist dies, wie man leicht einsieht, dieselbe Gleichung, auf die man durch den bei ähnlichen Problemen meist benutzten Ansatz $\lambda = \lambda' \cdot a$ geführt wird. Mit $p_0 = h^2 P_0$, $p_1 = h P_1$ erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{a_{11} + a_{22}}{2} &= p_0^2 \left(\frac{1}{384} p_1^2 + \frac{1}{48} p_1 + \frac{1}{24} \right) \\ &\quad + p_0 \left(\frac{1}{64} p_1^3 + \frac{1}{12} p_1^2 + \frac{1}{4} p_1 + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{48} p_1^4 + \frac{1}{12} p_1^3 + \frac{1}{4} p_1^2 + \frac{1}{2} p_1 + 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21} &= \\ &= p_0^4 \left(\frac{1}{36864} p_1^4 + \frac{1}{2304} p_1^3 + \frac{1}{384} p_1^2 + \frac{1}{144} p_1 + \frac{1}{144} \right) \\ &\quad + p_0^3 \left(\frac{1}{3072} p_1^5 + \frac{5}{1152} p_1^4 + \frac{7}{288} p_1^3 + \frac{23}{288} p_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{11}{72} p_1 + \frac{11}{72} \right) \\ &\quad + p_0^2 \left(\frac{13}{9216} p_1^6 + \frac{1}{64} p_1^5 + \frac{49}{576} p_1^4 + \frac{89}{288} p_1^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{19}{24} p_1^2 + \frac{4}{3} p_1 + \frac{4}{3} \right) \\ &\quad + p_0 \left(\frac{1}{384} p_1^7 + \frac{7}{288} p_1^6 + \frac{37}{288} p_1^5 + \frac{23}{48} p_1^4 + \frac{4}{3} p_1^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} p_1^2 + 4 p_1 + 4 \right) \\ &\quad + \frac{1}{576} p_1^8 + \frac{1}{72} p_1^7 + \frac{5}{72} p_1^6 + \frac{1}{4} p_1^5 \\ &\quad + \frac{7}{12} p_1^4 + p_1^3 + p_1^2. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß für $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ das Verfahren instabil ist. Ferner ist es instabil für $p_0 = 0$, p_1 beliebig, denn dann ist $a_{21} = 0$, demnach neben a_{22} auch $a_{11} = 1$ ein Eigenwert.

Wir betrachten noch den Fall $p_1 = 0$. Hier ist $a_{11} = a_{22}$, demnach

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= a_{11} \pm \sqrt{a_{12} a_{21}} = 1 + \frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{24} p_0^2 \\ &\quad \pm \frac{1}{24} \sqrt{p_0 (p_0 + 6) (p_0^2 + 16 p_0 + 96)}. \end{aligned}$$

Stabilität ist offenbar nur für $p_0 < 0$ möglich. Für $-6 \leq p_0 < 0$ ist der Radikand nicht positiv, also

$|\lambda_1| = |\lambda_2|$ und daher

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = |\lambda_1 \cdot \lambda_2| = 1 + \frac{1}{288} p_0^3 < 1$$

für die Stabilität notwendig und hinreichend. Diese Forderung ist aber bei $-6 \leq p_0 < 0$ erfüllt. Für $p_0 < -6$ sind die Eigenwerte reell und dem Betrage nach kleiner als 1, solange

$$p_0 > -8 + 4 \left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \right) = -6,690.$$

Demnach ist bei $p_1 = 0$ das NYSTRÖM-Verfahren genau dann stabil, wenn

$$-6,690 < p_0 = h^2 P_0 < 0.$$

Wir bemerken noch, daß LINIGER [2] beim RUNGE-KUTTA-Verfahren für die Differentialgleichung erster Ordnung den Stabilitätsbereich

$$-2,785 < p_0 = h P_0 < 0$$

erhält.

Literatur

- [1] W. QUADE, Über die Stabilität numerischer Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. ZAMM 39 (1959), S. 117–134.
- [2] W. LINIGER, Zur Stabilität der numerischen Integrationsmethoden für Differentialgleichungen. Dissertation Lausanne 1956.
- [3] H. RUTISHAUSER, Über die Instabilität von Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. u. Phys. 3 (1952), S. 65–74.

Verfasser: Dr. R. ANSORGE und Dr. W. TÖRNIG, Institut für Mathematik und Mechanik der Bergakademie Clausthal, Clausthal-Zellerfeld 1

Die Anwendung der Methode der Störungsrechnung für die Untersuchung des Einflusses der Querdehnungszahl auf den Spannungszustand dünner Platten

Wie bekannt, ist die Lösung der Gleichung für die Plattenbiegung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{N} \quad \dots (1)$$

in einigen Fällen nichtlinear abhängig von der Querdehnungszahl μ , und zwar auch abgesehen vom Einfluß der Plattensteifigkeit

$$N = \frac{1}{12} \cdot \frac{E h^3}{1 - \mu^2} \quad \dots (2).$$

Bei einfach zusammenhängenden Gebieten ist dies der Fall, wenn die Randbedingungen

$$L_1(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, w_{xxx}, w_{xxy}, w_{xyy}, w_{yyy}, \mu) = 0 \quad \dots (3),$$

$$L_2(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, w_{xxx}, w_{xxy}, w_{xyy}, w_{yyy}, \mu) = 0 \quad \dots (4)$$

von μ abhängig sind, so daß die Lösung die Form

$$w = (1 - \mu^2) \bar{w}(x, y, \mu) \quad \dots (5)$$

erhält.

In der Literatur wurde darauf hingewiesen, daß in manchen Fällen die Querdehnungszahl einen verhältnismäßig großen Einfluß aufweist und in Erwägung gezogen werden muß. In diesem Artikel werden wir vorführen, wie man diesen Einfluß in Betracht ziehen kann, wenn wir eine Lösung haben, die der Gleichung (1) und den Randbedingungen (3) und (4) für die Querdehnungszahl μ_0 entspricht und wir eine Lösung für ein anderes Material, dessen Querdehnungszahl

$$\mu = \mu_0 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq 1/2 \quad \dots (6)$$

ist, finden wollen.

Wie es sich bei der Lösung konkreter Fälle herausgestellt hat, ist es vorteilhaft, die Methode der Störungsrechnung anzuwenden, wobei wir als „Störungsparameter“ die Differenz der zwei Querdehnungszahlen $\mu - \mu_0$ betrachten werden. In solchen Fällen können wir dann die Lösung in Form einer unendlichen Reihe suchen

$$w(x, y, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \mu_0)^n \cdot w_n(x, y, \mu_0) \quad \dots (7).$$

Durch Einsetzen von (7) in (1), (2) und (3) und durch Vergleichen der Koeffizienten gleicher Potenzen erhalten wir rekurrente Beziehungen für die einzelnen w_n . Führen wir uns den Vorgang an dem Beispiel einer gleichmäßig belasteten schiefen Platte vor, deren Ausmaße und Bezeichnung dem untenstehenden Bild entnommen werden können, und vergleichen wir die Resultate mit den Werten, die in [1] direkt berechnet wurden.

Sei die Lösung für den Fall, daß die Querdehnungszahl $\mu_0 = 0$ ist (siehe erste Zeile der Tab. 1), bekannt, dann müssen für den Fall der allgemeinen Querdehnungszahl $\mu = \mu_0 + \varepsilon$ die folgenden Randbedingungen gelten:

Für gelenkig gelagerte Ränder $\bar{1}5$ und $\bar{1}'5'$

$$w = 0, \quad \Delta w = 0, \quad \dots (8a, b)$$

für freie Ränder

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\mu_0 + \varepsilon) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu_0 - \varepsilon) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9a, b).$$

Wenn wir (7) in (1) einsetzen und die Koeffizienten bei gleichen Potenzen vergleichen, bekommen wir folgende Beziehungen

$$\Delta \Delta w_0 = \frac{p}{N}; \quad \Delta \Delta w_n = 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots (10a, b).$$

Ähnlich ist der Fall, wenn wir (7) in (8a, b) einsetzen und die Koeffizienten vergleichen. Dann wird

$$w_n = 0; \quad \Delta w_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots (11a, b).$$

Wenn wir (7) in (9a) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \dots = 0.$$

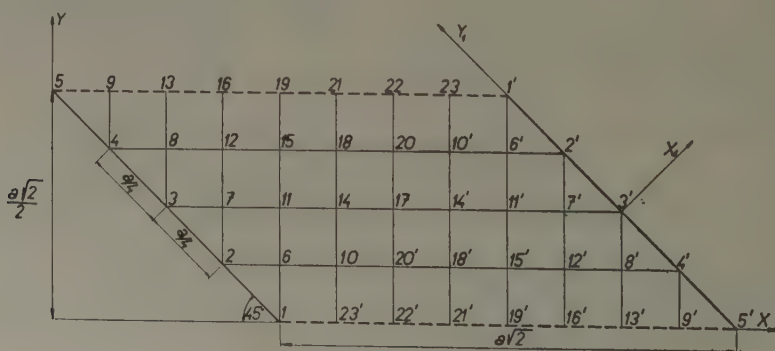


Tabelle 1

	Punkt 6	Punkt 7	Punkt 8	Punkt 9	Punkt 10	Punkt 11
$10^5 \cdot E h^3 w_0 / 12 p a^4$	615	594	591	585	1189	1116
$10^5 \cdot E h^3 [w_0 + 1/6 w_1] / 12 p a^4$	632	624	643	657	1226	1158
$10^5 \cdot E h^3 [w_0 + 1/6 w_1 + 1/36 w_2] / 12 p a^4$	636	628	650	665	1232	1165
Die direkte Lösung für $\mu = 1/6$	635	625	646	661	1235	1162
	Punkt 12	Punkt 13	Punkt 14	Punkt 15	Punkt 16	Punkt 17
$10^5 \cdot E h^3 w_0 / 12 p a^4$	1122	1139	1486	1513	1586	1622
$10^5 \cdot E h^3 [w_0 + 1/6 w_1] / 12 p a^4$	1204	1268	1532	1602	1748	1669
$10^5 \cdot E h^3 [w_0 + 1/6 w_1 + 1/36 w_2] / 12 p a^4$	1215	1284	1540	1614	1768	1677
Die direkte Lösung für $\mu = 1/6$	1209	1276	1539	1609	1759	1677
	Punkt 18	Punkt 19	Punkt 20	Punkt 21	Punkt 22	Punkt 23
$10^5 \cdot E h^3 w_0 / 12 p a^4$	1683	1836	1576	1810	1462	809
$10^5 \cdot E h^3 [w_0 + 1/6 w_1] / 12 p a^4$	1763	2004	1635	1957	1565	856
$10^5 \cdot E h^3 [w_0 + 1/6 w_1 + 1/36 w_2] / 12 p a^4$	1774	2024	1645	1974	1576	861
Die direkte Lösung für $\mu = 1/6$	1772	2019	1646	1975	1583	870

Durch den Vergleich erhalten wir rekurrente Beziehungen

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (12a).$$

Analog bekommen wir nach dem Einsetzen von (7) in (9b)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^3 w_n}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w_n}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial^3 w_{n-1}}{\partial x^2 \partial y}, \end{aligned} \right\} \dots (12b).$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Die Gleichungen (10a, b) und die Randbedingungen (11a, b) und (12a, b) ermöglichen es uns, den Einfluß einer kleinen Änderung der Querdehnungszahl rekursiv zu berechnen.

In der Tabelle 1 sind die Ergebnisse der Lösung für den Fall $\mu = \varepsilon = 1/6$ angeführt, und diese werden mit den durch direkte Berechnung erhaltenen Resultaten,

welche mittels der Differenzenmethode erreicht wurden, verglichen [1], [2].

Die Ergebnisse zeugen davon, daß schon die erste Annäherung sehr gute Resultate aufweist, die sich bei der zweiten Annäherung noch verbessern. Wie es sich aus dem Vergleich für den Fall $\mu = 1/3$ ergab, erhalten wir auch hier schon bei der ersten Annäherung gute Werte, doch die Konvergenz ist langsamer. Es scheint am vorteilhaftesten zu sein, die Berechnung für mittlere Werte μ_0 durchzuführen, d. h. $\mu_0 = 0,2$ bis $0,3$, und die weiteren Verbesserungen erhalten wir dann praktisch schon durch die erste Annäherung.

Literatur

- [1] J. BALÁŠ-A. HANUŠKA, Der Einfluß der Querdehnungszahl auf den Spannungszustand einer 45° schiefen Platte. Der Bauingenieur, im Druck.
- [2] V. P. JENSEN, Analysis of Skew Plates. University of Illinois Engineering Station, Bulletin Series No. 332 (1941).

Verfasser: Ing. A. HANUŠKA C. Sc., Institut für Bauwesen und Architektur der Slowakischen Akademie der Wissenschaften, Bratislava, Obrancov mieru 41, ČSSR

BUCHBESPRECHUNGEN

E. A. Chistova, Tables of Bessel Functions of the True Argument and of Integrals Derived from them. 523 S. London 1959. Pergamon Press. Preis geb. £ 5 net.

In der Reihe der Übersetzungen aus dem Russischen ins Englische, deren sich der Verlag in begrüßenswerter Weise angenommen hat, ist im vergangenen Jahr auch das vorliegende Tafelwerk herausgebracht worden. Es enthält siebenstellige Funktionentafeln für die BESSELFunktionen erster und zweiter Art $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ und $Y_1(x)$ und für die daraus abgeleiteten Integrale

$$Ji_\nu(x) = \int_x^\infty \frac{J_\nu(u)}{u} du, \quad (v = 0,1)$$

$$Yi_\nu(x) = \int_x^\infty \frac{Y_\nu(u)}{u} du$$

im Argumentbereich $0(0,001)15(0,01)100$. Da die meisten dieser Funktionen im Nullpunkt singular sind, aber mittels der Funktionen $1/x$ und $\ln x$ in

einfacher Weise auf im Nullpunkt reguläre Funktionen zurückgeführt werden können, sind für kleine Argumentwerte $x = 0(0,001)0,150$ Tafeln dieser Hilfsfunktionen beigelegt. Wo keine Differenzen angegeben sind, kann linear interpoliert werden; sonst sind die Tafeln für die Interpolation nach BESSEL eingerichtet. Für große Argumentwerte $x > 100$ werden asymptotische Entwicklungen angegeben. Bis auf die Werte von $J_0(x)$ und $J_1(x)$ sind die Tafeln mit dem elektronischen Rechner BESM neu berechnet worden. Sie stellen eine wertvolle Ergänzung der bisher verfügbaren Tafeln für BESSELSche Funktionen dar.

Dresden

H. HEINRICH

Leonhard Euler (Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages). Verantwortl. Redaktion K. SCHÖDER, Dtsch. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin. X + 336 S. m. 20 Abb. Berlin 1959. Akademie-Verlag. Preis geb. DM 58,—.

Anlaßlich der 250. Wiederkehr des Geburtstages Leonhard EULERS im April 1957 haben die Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin und die Akademie der Wissenschaften der UdSSR je eine

Festschrift herausgebracht. Bei dem vorliegenden Band handelt es sich um die erste von beiden. In ihr kommen hervorragende Vertreter der Mathematik zu Wort. Sie enthält Texte von Vorträgen, die während der EULER-Gedenk-Tagung in Berlin (21.—23. 3. 57) gehalten worden sind, und Abhandlungen, die eigens für die Festschrift eingereicht worden sind. Teilweise nehmen diese Arbeiten unmittelbar auf das Schaffen EULERS Bezug (ein Beitrag von MIKHAILOV-Moskau bringt Notizen über unveröffentlichte Manuskripte von EULER), oder sie zeigen die Ausstrahlungen seines Wirkens bis in unsere Zeit hinein auf, oder sie behandeln aktuelle mathematische Probleme. Der Inhalt — aus allen wichtigen Gebieten der Mathematik — ist vielschichtig wie es EULERS eigenes Werk war. Es kann hier nicht auf einzelne der 26 Arbeiten näher eingegangen werden.

Vielleicht hätte der außerordentlichen Bedeutung, die EULER auch den Anwendungen der Mathematik beigemessen hat, etwas mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden können.

Der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin und dem Akademie-Verlag, der der Festschrift eine würdige äußere Form gegeben hat, gebührt für diese Veröffentlichung Dank.

Dresden

H. HEINRICH

M. Päsler, Mechanik deformierbarer Körper. (Sammlung Götschen, Band 1189/1189a.) 199 S. m. 48 Abb. Berlin 1960. Walter de Gruyter. Preis brosch. DM 5,80.

Das Buch, dessen Verfasser Professor der Theoretischen Physik an der Technischen Universität Berlin ist, enthält in übersichtlicher Form etwa den Stoff, der in der Vorlesung „Mechanik deformierbarer Körper“ für Studenten der Mathematik und Physik an Technischen Hochschulen und Universitäten gebracht werden sollte. Es ist daher besonders für Studenten zum Nacharbeiten und Vertiefen des in der Vorlesung Gehörten geeignet. Ein dem Buch beigefügtes Literaturverzeichnis enthält die wichtigsten Werke, in denen die neueren Ergebnisse der verschiedenen Teilgebiete der Hydrodynamik, Aerodynamik und Elastizitätstheorie dargestellt sind. Dieses gibt dem interessierten Leser des PÄSLERSchen Buches die Möglichkeit, ausgehend von den in dem Buch gewonnenen Grundlagen, seine Kenntnisse auf den gewünschten Spezialgebieten zu vertiefen.

Berlin

W. ISAY

Handbuch der Physik, Band VIII/1. Strömungsmechanik I. VI + 471 S. m. 186 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. DM 132,—.

Der Band VIII/1 enthält folgende Einzelbearbeitungen: K. OSWATITSCH — Physikalische Grundlagen der Strömungslehre (S. 1—124), JAMES SERRIN — Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics (S. 125—263), L. HOWARTH — Laminar Boundary Layers (S. 264—350), H. SCHLICHTING — Entstehung der Turbulenz (S. 351—456).

Die Prinzipien der Strömungslehre sind von den Klassikern der vorigen Jahrhunderte ausgearbeitet. Eine straffe Zusammenfassung mit den Mitteln der modernen Mathematik ist wertvoll, weil eine solche Fundamentaldarstellung neben den zahlreichen für die praktische Rechnung notwendigen Vereinfachungen bestehen muß.

Hiermit beschäftigen sich die Artikel von OSWATITSCH und SERRIN. Beide Autoren beschreiben neben den klassischen Gebieten auch die modernen Bereiche der Gasdynamik und Grenzschichten. Im ersten Artikel werden die Grundgleichungen in Inte-

gralform niedergeschrieben. Die Bewegungsgleichungen sind in die EULERSche und die LAGRANGESche Form gefaßt. Beispiele typischer Strömungsbilder werden zum Teil durch Fotografien geboten. Die Darstellungen von OSWATITSCH und SERRIN sind nicht gegeneinander abgegrenzt, zumal der erste die Beschreibung der Strömungsphysik mit mathematischen Mitteln vornimmt, der zweite die mathematischen Verfahren nicht losgelöst von den physikalischen Zusammenhängen behandeln kann. Wenngleich es somit auch zu manchem Vergleichbaren im Text, in den Abbildungen sowie in der angezogenen Literatur kommt, so ist doch die unabhängige Behandlung des gleichen Stoffes durch zwei Fachleute für den Leser nützlich, da der Gegenstand der Betrachtung an Plastik gewinnt.

Das gleiche gilt für die Kapitel Instabilität der laminaren Grenzschichten sowie räumliche Instabilitäten bei der Strömung zwischen zwei Zylindern, die bei OSWATITSCH und SCHLICHTING vorkommen.

Der Artikel von HOWARTH bringt die konventionelle Darstellung der Theorie laminarer Grenzschichten, die ergänzt ist durch Referate über neuere Näherungsmethoden zur Bestimmung des Ablösungspunktes, über instationäre Grenzschichtströmung sowie dreidimensionale Grenzschichten und deren Ablösungsmöglichkeiten.

Der Beitrag von SCHLICHTING entspricht weitestgehend den Kapiteln Entstehung der Turbulenz aus SCHLICHTINGS bekanntem Buch „Grenzschichttheorie“ (3. Auflage). Ein Sachverzeichnis auf deutsch und englisch ermöglicht dem Leser schnelles Zurechtfinden.

Das Buch ist eine wertvolle Bereicherung der Literatur über die Grundlagen der Strömungslehre und sollte in keiner Bibliothek fehlen.

Dresden

W. ALBRING

J. GAZALÉ, Les structures de commutation à m valeurs et les calculatrices numériques. 78 S. m. 35 Abb. Paris 1959. Gauthier-Villars. Preis brosch. \$ 3,04.

In der vorliegenden Dissertation von M. MIDHAT J. GAZALÉ werden Methoden der Berechnung logischer Funktionen mehrerer Variabler behandelt, die auf einem Bereich von m Werten definiert sind und die die Grundlagen für logische Strukturen von digitalen Rechenautomaten bilden können. Der Spezialfall $m = 2$ ist unter dem Namen „BOOLEsche Algebra“ bekannt.

Der Verfasser führt die Begriffe „kombinatorisches Element“, „Kombinator“ und „Struktur“ axiomatisch ein, an denen man leicht technisch realisierbare logische Schaltungen wiedererkennt. Wegen der Beschränkung auf kombinatorische Strukturen gelangen Speicherstrukturen nicht zur Besprechung.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Analyse und Synthese von Strukturen bilden die charakteristischen Zahlen, die den möglichen Argumentkombinationen einer Transportfunktion zugeordnet sind. Eine Gesamtheit von Kombinatoren (Transportfunktionen) bildet eine „funktionelle Menge“, wenn man aus ihr alle möglichen Transportfunktionen, die auf dem gegebenen Definitionsbereich und demselben Wertebereich definiert sind, herstellen kann. Beispiele dafür sind die Minimumfunktion und die zyklische Funktion von POST einerseits und die Funktion von WEBB andererseits. Eine Gesamtheit von Kombinatoren wird eine „halbfunktionelle Menge“ genannt, wenn sie zusammen mit Konstanten die Eigenschaften von funktionellen Mengen besitzt. Ein Beispiel für eine halbfunktionelle Menge sind die drei Funktionen „verallgemeinerte Summe“, „verallgemeinertes Produkt“ und „Identität“. Sie gestatten, jede Funktion σ von n Variablen v_0, v_1, \dots ,

v_{n-1} mit dem Definitions- und Wertebereich $E = (0, 1, \dots, m-1)$ in der kanonischen Form A

$$\sigma(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) = \sum_{j=0}^{m^n-1} \sigma_j \prod_{i=0}^{n-1} I(\alpha_i^j, v_i)$$

darzustellen. Von ihr ausgehend kann man eine universelle Struktur herstellen, mit der man alle Funktionen von n Variablen, die bezüglich E abgeschlossen sind, technisch realisieren kann. Durch Verwendung der Negation findet man die disjunktive kanonische Form und durch Verallgemeinerung der Begriffe Summe, Produkt und Identität die konjunktive kanonische Form. Da man die Identität durch Polynome mod p darstellen kann, bildet schon die Gesamtheit aus der Summe mod p und dem Produkt mod p eine halbfunktionelle Menge. Aus den gegebenen Funktionswerten kann man unter Einführung eines neuen Matrizenproduktes, Verschmelzungsprodukt genannt, die Koeffizienten für die Polynomdarstellung einer Transportfunktion berechnen. In ähnlicher Art gelangt man auch zu den Koeffizienten der Binomialdarstellung einer Transportfunktion.

Der Verfasser verallgemeinert die Funktion von WEBB mittels der zyklischen Funktion und zeigt, daß diese verallgemeinerte Funktion funktionell ist. Eine Verallgemeinerung der Funktionen von POST ergibt, daß die zyklische Funktion und die verallgemeinerte Funktion von POST zusammen unter bestimmten Bedingungen eine funktionelle Menge bilden.

Bei einer ansprechenden Darstellung kann die Arbeit Anregungen für die Konstruktion neuer digitaler Rechenautomaten hinsichtlich der Wechselbeziehungen zwischen theoretischer Logik und Technik bieten.

Jena

HEYNE und SCHREITER

D. Greenspan, *Theory and Solution of Ordinary Differential Equations*. VIII + 148 S. New York 1960. Macmillan Company. Preis geb. \$ 5.50.

Der Verfasser hat sich in diesem Buche das Ziel gesetzt, mit den Elementen der Differentialrechnung vertraute Studierende der exakten Naturwissenschaften in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen einzuführen.

Die Behandlung der Differentialgleichungen erster Ordnung beschränkt sich auf die wichtigsten klassischen Integrationsmethoden und Gleichungstypen: Trennung der Veränderlichen, totale Differentialgleichungen, Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen und lineare Gleichungen. Der wichtige Begriff der singulären Lösung wird nur an einem Beispiel kurz erwähnt. Für die linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung wird nach Einführung der Begriffe lineare Unabhängigkeit und Fundamentalsystem die Integrationsmethode der Variation der Konstanten erläutert, ohne jedoch durch das Verfahren der Ordnungserniedrigung ihre analytische Bedeutung zu begründen. Die knappen Hinweise auf das Ansatzverfahren (Koeffizientenvergleich) bei linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten können der praktischen Bedeutung dieser Methode nicht vollauf gerecht werden. Auch der sehr kurze Abschnitt über die LAPLACE-Transformation kann dem Leser ihre Bedeutung für die Integration von Differentialgleichungen nur schwerlich klar machen.

Der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen mittels der PICARD-LINDELÖFSCHEN Methode der schrittweisen Näherung wird ausführlich dargestellt.

Bei den linearen Differentialgleichungssystemen beschränkt sich das Buch auf homogene Systeme und überläßt dem Leser die Erweiterung auf inhomogene simultane Gleichungen.

Die Behandlung der linearen Differentialgleichungen schließt mit einer Einführung in die FROBENIUSsche Theorie ab. Für die in der mathematischen Physik vorkommenden linearen Differentialgleichungen sind nur kurze Lösungsangaben gemacht. Die Ausführung überläßt das Buch dem Leser. Mit kurzen Bemerkungen zu einigen numerischen Integrationsmethoden und zum STURM-LIOUVILLESCHEN Eigenwertproblem wird das Buch abgeschlossen.

Da die verwendeten analytischen Grundbegriffe und die Integrationsmethoden durch zahlreiche Beispiele erläutert sind, wird der Leser angehalten, sich mit allen Einzelheiten genau auseinanderzusetzen. Er kann dadurch ohne großen Zeitaufwand einen ersten Einblick in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen gewinnen und Nutzen aus dem Studium des Buches ziehen.

Freiberg (Sachs.)

A. KNESCHKE

F. O. Ringleb, *Mathematische Formelsammlung*. (Sammlung Götschen, Band 51/51a.). 7. Aufl. 320 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 5,80.

Gegenüber der 6. Auflage der bekannten Formelsammlung sind im wesentlichen die folgenden Erweiterungen zu nennen. Der Matrizenkalkül ist ausführlich behandelt. Im Abschnitt über Differentialrechnung ist ein graphisches Verfahren angegeben. Der Integralteil ist durch eine Anzahl Beispiele bereichert worden. Außerdem sind die Grundlagen der LAPLACE-Transformation, der FOURIERintegrale und die Integralsätze von GREEN und STOKES mit aufgenommen worden. Die FOURIERreihen sind durch eine Tabelle und die Behandlung der FOURIERanalyse ergänzt worden. Aus den einzelnen Hinweisen über das Rechnen im Komplexen in der 6. Auflage ist nun ein selbständiger Abschnitt über Funktionentheorie und konforme Abbildung entstanden. Neu ist hierin die Behandlung der analytischen Fortsetzung und eine für den Rahmen dieses Büchleins recht ausführliche Darstellung der konformen Abbildung, die bis zur Angabe der SCHWARZ-CHRISTOFFEL-Formel und des RIEMANNschen Abbildungssatzes reicht. Der Abschnitt über Differentialgleichungen enthält jetzt die LEGENDRESche, LAGUERRESche, HERMITESche, BESSELSche und hypergeometrische Differentialgleichung. Der große Benutzerkreis der Formelsammlung wird die Erweiterungen begrüßen.

Dresden

H. BIALY

Hans Ziegler, *Mechanik I. Statik der starren und flüssigen Körper sowie Festigkeitslehre*. 3. neubearbeitete Aufl. 244 S. Basel 1960. Birkhäuser-Verlag. Preis geb. Sfr. 28,50.

Es handelt sich um die 3. Auflage und zugleich Neufassung der Mechanik I von H. ZIEGLER und E. MEISSNER (1. Aufl. 1946, 2. Auflage 1948).

Der Verfasser ist Professor für Mechanik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich und behandelt in diesem Band die elementaren Gebiete der Mechanik, wie sie etwa den ersten Mechanik-Vorlesungen an Technischen Hochschulen entsprechen. Dabei ist entsprechend den modernen Anschauungen den analytischen Methoden größere Bedeutung zugemessen worden, und sie sind gegenüber den graphischen Methoden in den Vordergrund getreten.

Das 1. Kapitel bringt grundlegende Tatsachen über Kräfte und die Statik der Kräftegruppen in der Ebene und im Raum; ferner Schwerpunktsberechnung, Reibung und die Statik des Fadens. Das 2. Kapitel enthält einiges über Kraftfelder und Grundbegriffe der Vektoranalysis, daran anschließend die Hydrostatik sowie die Theorie der Flächenträgheitsmomente. Im 3. Kapitel ist die Festigkeitslehre dargestellt. Es werden behandelt: Spannungs-

und Verzerrungszustände an Körpern, Beanspruchung von Balken und Wellen, Druck und Zug, verschiedene Biegeprobleme, Knickung und Torsion. Den Abschluß bilden die Sätze von MAXWELL und CASTIGLIANO. Die Darstellung wird vielfach durch Beispiele ergänzt, und am Schluß der einzelnen Abschnitte finden sich Angaben, an denen der behandelte Stoff geübt werden kann.

Berlin

W. ISAY

S. Vajda, *An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games*. 76 S. London 1960. Methuen & Co. Ltd. Preis geb. 9 s 6 d net.

Dieses Büchlein dient dazu, den Leser mit dem im Titel genannten Gegenstand bekanntzumachen und zum Studium weiterführender Werke, auf die ausdrücklich hingewiesen wird, anzuregen.

Nach einigen Aufgaben des linearen Programmierens werden an Hand von Zahlenbeispielen eine Lösungsmethode (DANTZIG) des Transportproblems, die Simplexmethode und die duale Simplexmethode besprochen; in einem Anhang wird das Dualitätstheorem bewiesen. Darauf werden die Grundkonzeptionen der Theorie der Matrix-Spiele erläutert und die Zusammenhänge mit dem linearen Programmieren erklärt, im Anhang wird ein Beweis des Hauptsatzes angedeutet.

Das Büchlein kann Lesern ohne spezielle math. Vorbildung, etwa unseren Oberschülern, die sich über den aktuellen Gegenstand informieren wollen, empfohlen werden.

Dresden

L. BITTNER

Kai Lai Chung, *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Band 104.) X + 278 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 65,60.

In dem vorliegenden Buch behandelt der Verfasser eine spezielle Klasse MARKOFFscher Prozesse, die Klasse der homogenen MARKOFFschen Prozesse mit höchstens abzählbar vielen Zuständen (homogene MARKOFFsche Ketten). Eine derartige Beschränkung ist sowohl im Hinblick auf die umfassende theoretische Entwicklung, die die Theorie der MARKOFFschen Prozesse in den letzten Jahren erfahren hat, als auch im Hinblick auf die vielseitigen Anwendungen gerade der homogenen MARKOFFschen Ketten zu begrüßen; sie ermöglicht es, die Theorie der homogenen MARKOFFschen Ketten umfassender darzustellen, als es in den bisher bekannten Lehrbüchern und Monographien geschieht. Der Verfasser war bestrebt, die Vielzahl der auf diesem Gebiet vorhandenen Originalarbeiten einheitlich darzustellen und hat das Buch durch eigene Untersuchungen bereichert.

Es wird angenommen, daß der Leser des Buches mit elementaren Tatsachen aus der Theorie der reellen Funktionen und aus der Maßtheorie vertraut ist. Ferner wird eine allgemeine Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausgesetzt, wie sie in modernen Einführungsbüchern gegeben wird.

Das Buch besteht aus zwei Teilen, die im wesentlichen unabhängig voneinander sind. In Teil I behandelt der Verfasser homogene MARKOFFsche Ketten mit diskreten Parameterwerten. Bei der Einführung der notwendigen Grundbegriffe fällt als bemerkenswert ins Auge, daß der Verfasser Zufallsgrößen „im verallgemeinerten Sinne“ betrachtet, d. h. solche, die nur auf einer Teilmenge $\Delta_0 \in \mathfrak{F}$ definiert sind ($(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ist das zugrunde gelegte Wahrscheinlichkeitsfeld). Es wird eine Klassifikation der Zustände vorgenommen und anhand dieser das Grenzverhalten ($n \rightarrow \infty$) der Übergangswahrscheinlich-

keiten nach n Schritten untersucht. Danach werden Wahrscheinlichkeiten für den Übergang vom Zustand i zum Zustand j betrachtet, wobei Zustände einer vorgegebenen Menge nicht als Zwischenzustände auftreten dürfen („taboo probabilities“). In den folgenden Paragraphen werden erzeugende Funktionen, Momente der Verteilung der Rekurrenzzeit, von der Zukunft unabhängige Zufallsgrößen, funktionale MARKOFFscher Ketten, Ergodizität und Grenzwertsätze behandelt.

Teil II ist der Theorie der homogenen MARKOFFschen Ketten mit stetigem Parameter gewidmet. Zunächst werden notwendige analytische Hilfsmittel über abzählbare Mengen reeller Funktionen, die später als Übergangswahrscheinlichkeiten homogener MARKOFFscher Ketten gedeutet werden, bereitgestellt. Nach der Einführung einiger Grundbegriffe aus der Theorie zufälliger Prozesse, wie stochastische Stetigkeit, Meßbarkeit, Separabilität werden Konstanzmengen (das sind Mengen von Parameterwerten, auf denen eine MARKOFFsche Kette einen konstanten Wert annimmt), von der Zukunft unabhängige Zufallsgrößen und streng-MARKOFFsche Ketten behandelt. Die folgenden Paragraphen entsprechen ihrem Inhalt nach weitgehend dem Schlußparagraphen aus Teil I. Hervorzuheben ist besonders § 13, in dem interessante Resultate des Verfassers über den Zusammenhang zwischen MARKOFFschen Ketten mit diskreten und stetigen Parameterwerten angegeben werden. Es folgen Betrachtungen über die Lösbarkeit der grundlegenden Differentialgleichungssysteme MARKOFFscher Ketten sowie über das Verhalten der Trajektorien MARKOFFscher Ketten (erste Unendlichkeitsstelle, § 19).

Während in Teil I nur einige Irrfahrtprobleme als Beispiele kurz angeführt werden, gibt der Verfasser in II, § 20 Beispiele allgemeiner Natur an. Es ist daher besonders für den Anfänger zu empfehlen, sich anhand der Literaturhinweise mit weiteren Beispielen vertraut zu machen. Man kann es als leichten Mangel empfinden, daß der Verfasser an keiner Stelle auf den Fall MARKOFFscher Ketten mit endlich vielen Zuständen spezialisiert und den sich anbietenden Matrizenkalkül völlig vermeidet. Der Verfasser bedauert selbst, daß die im Anhang angegebenen Resultate bezüglich der Differenzierbarkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten nicht in den Text eingearbeitet werden konnten. Das Buch gewinnt durch die an die einzelnen Paragraphen angefügten vielseitigen Hinweise auf die betreffenden Originalarbeiten, auf andere interessante Darstellungsmöglichkeiten und auf ungelöste Probleme.

Dresden

W. WINKLER

S. Vianelli, *Prontuari per calcoli statistici*. XV + 1543 S. Palermo/Roma 1959. Abbaco s.r.l. Editore. Preis geb. Lire 16.000.

Dem Praktiker, der sich mit statistischen Untersuchungen beschäftigt, ein umfangreiches Tabellenmaterial in die Hand zu geben, ist das Hauptziel des vorliegenden Buches.

Das Werk gliedert sich in zwei Abschnitte. Der erste Teil enthält 300 numerische Tafeln für die verschiedensten Anwendungsgebiete statistischer Methoden. So findet man ausführliche Tabellen für statistische Tests von Hypothesen, auch solche für nicht-parametrische Prüfmethode, umfangreiche Tafeln zur Anwendung der Varianzanalyse in der Landwirtschaft, zur statistischen Qualitätskontrolle in der Industrie, zur Bevölkerungsstatistik und Zinsrechnung und zur Anwendung auf Probleme der praktischen Analysis, wie z. B. Tafeln der Gamma- und BESSELFunktionen, der LEGENDRESchen Polynome und BERNOULLISchen Zahlen.

Durch Tafeln von Wurzeln, Potenzen, Potenzsummen usw. werden jegliche maschinelle Rech-

nungen beseitigt. Im Vergleich zu anderen statistischen Tafelwerken, wie z. B. denen von E. S. PEARSON und H. O. HARTLEY oder von A. HALD enthält der erste Teil des vorliegenden Buches ausführlichere und weitergehende numerische Tafeln zur unmittelbaren Anwendung der einzelnen statistischen Untersuchungsmethoden. Die zusammengestellten Tabellen stammen aus den verschiedensten Tafelwerken und Originalarbeiten und wurden teilweise neu bearbeitet von der „Scuola di Statistica dell'Università di Palermo“. Ein Quellenverzeichnis findet man am Schluß des Werkes.

Der zweite Teil „Ergänzungen, Begriffe und Beispiele zu den numerischen Tafeln“ bringt einen vollständigen Formelapparat zu den einzelnen Tabellen des ersten Teiles. Er ermöglicht durch seine Ausführlichkeit und Beispiele eine rasche Anwendung der numerischen Tafeln auf statistische Probleme, auf die Verarbeitung und Analysierung von Daten und auf die Interpretation erzielter Resultate und ist so getrennt als Compendium für die verschiedenen statistischen Anwendungsmethoden zu werten. Auf die Frage der Interpolation in den einzelnen Tafeln wird allerdings in diesem Zusammenhang nicht eingegangen.

Das Tabellenwerk wendet sich an alle, die sich mit der Auswertung von Experimenten beschäftigen. Es enthält die wesentlichsten Hilfsmittel zur Verarbeitung numerischer Daten mittels statistischer Methoden und ist deshalb für den Praktiker, sei er nun Techniker oder Ökonom, Biologe oder Mediziner, Psychologe oder Agronom, sehr zu empfehlen.

Dresden

R. STORM

Dr.-Ing. H. Kühl, Probleme des Kreuzstrom-Wärmeaustauschers. VII + 83 S. m. 34 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. DM 10,50.

Der Kreuzstrom liefert gegenüber dem reinen Gegenstrom eine größere Wärmedurchgangszahl, hat aber bei sonst gleichen Verhältnissen eine kleinere mittlere Temperaturdifferenz als dieser. Man strebt die Vorteile beider Bauarten in dem Kreuz-Gegenstrom-Wärmeaustauscher zu vereinigen, doch existiert bislang eine exakte Berechnungsmöglichkeit nur für eine einfache Querdurchströmung eines Röhrenbündels. Die für mehrfach hintereinander angeströmte Bündel im VDI-Wärmeatlas zu findende Faustformel ist unbefriedigend. Der Verfasser hat es unternommen, für 6 verschiedene Schaltmöglichkeiten rein theoretisch mit erheblichem mathematischem Aufwand exakte Lösungen zu finden. Da die exakten Lösungen für die Praxis wegen ihres Zeitbedarfs unzumutbar sind, hat der Verfasser weiter unter Annahme bestimmter plausibler Ansätze für die Temperaturverteilung in den Eintrittsquerschnitten Näherungslösungen abgeleitet, deren Ergebnisse mit den exakten Lösungen verglichen und in bequemen Arbeitsblättern dargestellt.

Obwohl die Arbeit interessante und für die Praxis wertvolle Hinweise für die Wahl der jeweils zweckmäßigen Schaltung gibt, muß doch bedauert werden, daß eine Bestätigung der Ergebnisse und der vorausgesetzten Annahmen durch die unmittelbare Messung zu gewinnen vom Verfasser nicht unternommen wurde. So ist u. a. die Abwertung der in der Praxis am häufigsten angewendeten Schaltung A höchstwahrscheinlich abwegig, weil bei den Umlenkungen eine Verwirbelung auftritt, so daß ein nennenswerter Unterschied zur Schaltung B entfällt.

Dresden

H. FALTIN

Grundzüge der Mathematik. Band II: Geometrie. Herausgegeben von H. Behnke und F. Bachmann. 646 S. mit Abb. Göttingen 1960. Vandenhoeck & Ruprecht. Preis geb. DM 58,—.

Das Buch ist auf Anregung von WILHELM Süss (Freiburg) von 31 führenden Geometern aus Ost- und Westdeutschland, Holland und Österreich, von Vertretern der Universitäten, Pädagogischen Hochschulen und höheren Schulen geschrieben worden. Aus dem Vorwort: „Bei der Auswahl des Stoffes des vorliegenden Bandes ließen wir uns von der Frage leiten, welche Theorien und Methoden der Lehrer an einer Höheren Schule heute kennen und überblicken sollte, um den wissenschaftlichen Standort seines geometrischen Unterrichtes bestimmen zu können. Dazu erwies es sich als notwendig, den Rahmen nicht zu eng zu spannen, und wir hoffen, daß auch weitere Kreise von Mathematikern, die zu berücksichtigen uns im Laufe der Arbeit mehr und mehr notwendig erschien, von dem Bande Nutzen haben werden“.

Dem Leser wird von hoher Warte her ein Einblick in den Standort der Geometrie in unserem geistigen Kosmos und in die grundlegenden Prinzipien, Methoden und Tendenzen gegeben. Es wird dann ein Überblick über die wichtigsten neueren geometrischen Disziplinen vermittelt, in Kürze und mit Beschränkung auf das Wesentlichste, aber mit Sorgfalt in der Ausarbeitung der leitenden Ideen.

Aus dem Inhaltsverzeichnis: 1) Geometrie phänomenologisch; 2) Axiomatische Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie; 3) Spiegelungen; 4) Der synthetische und der analytische Standpunkt in der Geometrie; 5) Geometrische Konstruktionen; 6) Polygone und Polyeder; 7) Vektoren und Trigonometrie; 8) Projektive affine und metrische Geometrie; 9) Algebraische Geometrie; 10) KLEINS Erlanger Programm; 10a) Gruppentheorie und Geometrie; 11) Grundzüge der darstellenden Geometrie; 12) Kurven und Flächen; 13) Ausgewählte Fragen der Topologie.

Das Buch sollte in jeder Schulbibliothek greifbar sein. Aber auch jeder Mathematiker in der Praxis und an der Universität wird gut tun, immer wieder einmal das eine oder andere Kapitel dieses Buches in sich aufzunehmen.

Halle/S.

O.-H. KELLER

W. Blaschke und H. Reichardt, Einführung in die Differentialgeometrie. Zweite Aufl. VII + 173 S. m. 57 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 24,—.

Die erste Auflage (1949), besprochen in dieser Zeitschrift (Band 31 (1951), S. 157) wurde umgearbeitet; dabei wurde eine Reihe neuerer Ergebnisse berücksichtigt. Sehr wertvoll sind eine Anzahl von Anmerkungen, die A. P. NORDEN für die russische Übersetzung der ersten Auflage gemacht hat; sie wurden hier in die zweite Auflage übernommen.

Vor allem enthält diese zweite Auflage die lange erwarteten algebraischen Untersuchungen von REICHARDT über n -dimensionale Differentialgeometrie. Durch eine sinnreiche Erweiterung des CARTANSchen Kalküls der alternierenden Differentialformen gelingt dem Verf. eine äußerst übersichtliche und prägnante Verallgemeinerung der aus dem Raum bekannten Begriffe und Sätze in den Raum von n Dimensionen.

Das Buch setzt eine gewisse Übung und Bereitschaft in der Aneignung und Anwendung eines abstrakten Kalküls voraus. Der Leser wird dafür belohnt durch eine vertiefte Einsicht in die Struktur des Gegenstandes, durch kurze übersichtliche Formeln und eine überaus reiche Fülle des Stoffes.

Halle/Saale

O.-H. KELLER

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

K. Klöppel und J. Scheer, Beulwerte angesteifter Rechteckplatten. Kurventafeln zum direkten Nachweis der Beulsicherheit für verschiedene Steifenanordnungen und Belastungen. 107 S. m. 45 Abb. u. 103 Beulwerttafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 44,—.

W. Flüge, Stresses in Shells. XII + 499 S. m. 244 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 58,80.

Handbuch der Physik, Bd. IX. Strömungsmechanik III. VII + 815 S. m. 248 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 198,—.

S. Valentiner, Vektoren und Matrizen. (Sammlung Götschen, Band 354/354a.) 2. Aufl. 202 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 5,80.

H. Schubert / R. Haussner / J. Erlebach, Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. (Sammlung Götschen, Band 81.) 157 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 3,60.

O. Perron, Irrationalzahlen. 4. Aufl. VIII + 202 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis geb. DM 28,—.

F. R. Güntsch, Einführung in die Programmierung digitaler Rechenautomaten. 144 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis geb. DM 24,—.

Handbuch der Physik, Band X. Struktur der Flüssigkeiten. VI + 320 S. m. 41 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer Verlag. Preis geb. DM 96,—.

H. Schlichting und E. Truckenbrodt, Aerodynamik des Flugzeuges. Band 2. XVI + 485 S. m. 389 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer Verlag. Preis geb. DM 61,50.

A. V. Lebedev and R. M. Fedorova, A Guide to Mathematical Tables. XLVI + 586 S. Oxford/London/New York/Paris 1960. Pergamon Press. Preis geb. £ 5 5 s. net.

J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis. (Vol. X of Pure and Applied Mathematics.) XIV + 361 S. New York 1960. Academic Press Inc. Preis geb. \$ 8,50.

S. Danø (Assistant Professor of Economics, University of Copenhagen), Linear Programming in Industry. Theory and Applications. VIII + 120 S. m. 6 Abb. Wien 1960. Springer-Verlag. Preis brosch. DM 20,—.

NACHRICHTEN

Sitzung des Generalrats der IUTAM am 1. 9. 60
in Stresa

Der Generalrat der IUTAM genehmigte in seiner Sitzung anlässlich des 10. Internationalen Kongresses für Angewandte Mechanik in Stresa die Erweiterung der bisherigen deutschen Vertretung im Generalrat von drei auf vier Mitglieder. Auf Vorschlag des Vorstandsrats der GAMM wurde als vierter deutscher Vertreter neben den Professoren H. GÖRTLER, R. GRAMMEL und A. WALTHER der derzeitige Vorsitzende der GAMM, Prof. Dr. R. SAUER in den Generalrat aufgenommen.

Die Neuwahlen für das geschäftsführende Büro der IUTAM für die Arbeitsperiode 1960—64 hatten folgendes Ergebnis: Präsident: Prof. G. TEMPLE (U. K.); Vizepräsident: Prof. F. K. G. ODQVIST (Schweden); Sekretär: Prof. M. ROY (Frankreich); Schatzmeister: Prof. W. T. KOITER (Holland); Mitglieder: Prof. H. GÖRTLER (Deutschland), Prof. N. J. HOFF (USA), Prof. N. I. MUSKHELISHVILI (USSR), Prof. H. ZIEGLER (Schweiz).

Das Büro der IUTAM beschloß, im Jahre 1962 auf Vorschlag der deutschen Delegation ein „Internationales Symposium über schallnahe Strömungen“ in Aachen unter Leitung von Prof. Dr. K. OSWATITSCH zu veranstalten.

Sitzung des Internationalen Komitees für die Kongresse der angewandten Mechanik in Stresa am 30. 8. 60

Das für die Veranstaltung der Internationalen Mechanik-Kongresse verantwortliche Komitee nahm anlässlich des 10. Kongresses in Stresa die von Prof. Dr. R. GRAMMEL im Namen der GAMM übermittelte Einladung an, den 11. Internationalen Kongreß für Angewandte Mechanik im Jahre 1964 in Deutschland zu veranstalten, u. zw. auf Vorschlag des Vorstandsrats der GAMM an der Technischen Hochschule München.

Durch Zuwahl wurde Prof. Dr. H. GÖRTLER als 35. Mitglied (und neben den Professoren R. GRAMMEL und W. TOLLMIEN als 3. deutsches Mitglied) in das Internationale Komitee aufgenommen. GÖ.

BERICHTIGUNG

Zu B. Tanimoto, On the Displacement-Function for the Axially Symmetrical Visco-Elastic Vibration, ZAMM 40 (1960), S. 190:

Nach Mitteilung des Verfassers muß die letzte Zeile von Gleichung (3) lauten:

$$\left(1 + \frac{b^2}{b'^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Gamma^2 - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

H.

ALEXANDER GELEJI

Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch

1960. X, 754 Seiten — 764 Abbildungen — 70 Tabellen — gr. 8° — Lederin DM 88,—

Der Verfasser zeigt in diesem Werk, wie man die auftretenden Kräfte und den Werkstoff-Fluß bei der bildsamen Formung der Metalle durch Versuch und Rechnung erfassen kann. Die verschiedenen Verformungsverfahren: Stauchen, Schmieden, Pressen, Walzen, Stangen- und Drahtziehen, Strang- und Rohrpressen, Preßlochverfahren, Schmieden im Gesenk, Blechtiefziehen usw. werden vom Standpunkt der oben angegebenen Zielsetzung aus behandelt und die Ergebnisse mit zahlreichen neuen Versuchsergebnissen unterstützt. Die theoretische und die experimentelle Klärung der einzelnen Verformungsverfahren bzw. Formänderungsvorgänge werden überall mit praktischen Beispielen ergänzt, auch wird die richtige Anwendung der ausgearbeiteten Rechenverfahren gezeigt. Das Buch ist auf Grund der langjährigen praktischen, experimentellen und theoretischen Arbeiten des Verfassers entstanden und für den Ingenieur in Forschung und Praxis bestimmt.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N

Siebenstellige Logarithmen der Fakultäten der Zahlen 0 bis 12 000

Herausgegeben im Auftrage des Instituts für Maschinelle Rechentechnik
an der Technischen Hochschule Dresden

von Dipl.-Math. Ulrich Bornitz und Dipl.-Ing. Andreas Schubert

51 Seiten. 8°. 1960. In Kunstleder 10,30 DM

Die vorliegende Tafel entstand aus Berechnungen, die für das Institut für Mathematische Statistik an der Technischen Hochschule in Dresden durchgeführt wurden. Es war dabei notwendig, für den Vergleich verschiedener in der statistischen Qualitätskontrolle verwendeten Stichprobenpläne auf die sonst üblichen Näherungen durch die Binomial- bzw. Poissonische Verteilung zu verzichten und die Wahrscheinlichkeiten der hypergeometrischen Verteilung zu berechnen, und zwar in Parameterbereichen, für welche keine Diagramme oder Tabellen zur Verfügung stehen.

Die Berechnung erfolgte auf dem digitalen elektronischen Rechenautomaten D 1 des Instituts für Maschinelle Rechentechnik an der Technischen Hochschule Dresden auf 14 Stellen nach dem Komma. Dadurch wurden Zweifelsfälle bei der Abrundung vermieden, so daß die Richtigkeit der siebenten Dezimalstelle garantiert ist.



B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT · LEIPZIG

SCHRIFTENREIHE DES FORSCHUNGSINSTITUTS FÜR MATHEMATIK BEI DER DEUTSCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN

Herausgegeben von Heinrich Grell, Josef Naas, Hans Reichert, Willi Rinow, Erhard Schmidt und Kurt Schröder

Band 6

A. M. JAGLOM

Einführung in die Theorie stationärer Zufallsfunktionen

Übersetzung aus dem Russischen; deutsche Übersetzung unter wissenschaftlicher Redaktion von Herbert Goering
1959. VIII, 177 Seiten — 8 Abbildungen — gr. 8° — DM 24,—

Das Buch enthält eine ausführliche Übersicht über die Korrelationstheorie stationärer Zufallsfunktionen, in der die Spektralzerlegung dieser Funktionen eine zentrale Stellung einnimmt. Die mathematischen Sätze werden an Hand von Beispielen erläutert und physikalisch interpretiert. Es folgt eine elementare, aber exakte Darlegung des vom praktischen Standpunkt sehr wichtigen Filtrations- und Extrapolationsproblems stationärer Folgen und stationärer, stochastischer Prozesse. Besonders ausführlich werden dabei die Probleme behandelt, bei denen eine in $e^{it\lambda}$ bzw. in λ rationale Spektraldichte existiert. Zum Verständnis dieses Buches werden lediglich die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die einfachsten Tatsachen aus der Theorie des Hilbertraumes vorausgesetzt.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten



A K A D E M I E · V E R L A G · B E R L I N